

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 2

Serie nona

1 Febbraio 1952

## L'impianto ideale per la separazione degli isotopi.

C. MARCHETTI e M. SILVESTRI

*Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 24 Ottobre 1951)

**Riassunto.** — Si imposta l'equazione che descrive il funzionamento del separatore di isotopi ideale. Tale equazione è di tipo integrale e se ne ricava la soluzione esatta e quella asintotica. Da essa è possibile dedurre il consumo di energia necessario per ottenere un predeterminato arricchimento, il quale risulta funzione solo di tre costanti fisiche, caratteristiche del processo che è alla base della separazione.

1. — Il problema del funzionamento di un impianto per la separazione degli isotopi è stato ampiamente trattato da COHEN ed altri <sup>(1)</sup>. L'indagine è tuttavia limitata a tipi particolari di impianti e a valori del fattore di separazione poco diversi dall'unità. Questa approssimazione, largamente sufficiente nella maggior parte dei casi, cade in difetto per gli impianti che separano il Deuterio dall'Idrogeno, nei quali il fattore di separazione ha spesso un valore molto superiore all'unità. Nella trattazione che segue ammetteremo che il fattore di separazione, definito più avanti, abbia un valore qualsiasi.

Si abbia una sostanza composta di più elementi, uno dei quali sia costituito da una miscela di due isotopi. Si faccia subire a detta sostanza una trasformazione fisica, chimica o chimico-fisica. Prima della trasformazione sia  $c$  la concentrazione molare dell'isotopo desiderato nella sostanza. Dopo che questa ha subito la trasformazione, la concentrazione molare sarà variata e sarà dive-

<sup>(1)</sup> K. COHEN: *Science and Engineering of Nuclear Power* (Cambridge, Mass., 1949), vol. II, cap. II.

nuta  $c'$ , in virtù del fatto che non tutte e due le specie isotopiche subiranno la trasformazione nello stesso modo, e durante questa si avrà un effetto (in generale piccolo) di separazione.

Noi supporremo che:

$$(1) \quad \frac{c}{1-c} \bigg/ \frac{c'}{1-c'} = q = \text{cost.},$$

dove  $q$ , denominato «fattore di separazione», è indipendente dalle concentrazioni. Questa relazione vale, in prima approssimazione, per molti tipi di trasformazioni (ad esempio, per la separazione elettrolitica del Deuterio dall'Idrogeno). Chiamando inoltre  $r$  il rapporto  $c/(1-c)$ , e  $r'$  il rapporto  $c'/(1-c')$ , avremo

$$(2) \quad \frac{r}{r'} = q.$$

2. - Un impianto per la separazione di due isotopi può essere immaginato come un sistema nel quale entri una miscela di concentrazione  $c_i$ , mentre ne escono due frazioni, una arricchita nell'isotopo desiderato, di concentrazione  $c_0$ , e l'altra impoverita di concentrazione  $c_1$ . All'interno dell'impianto avviene la separazione, che noi supporremo sia ottenuta a spese di un sol tipo di trasformazione (cioè che l'impianto sia, ad esempio, puramente elettrolitico o puramente di distillazione, ecc.). Affinchè la separazione avvenga nella maniera

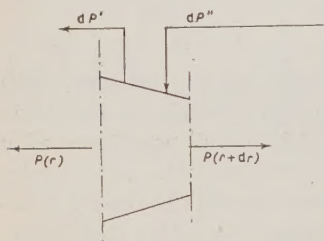


Fig. 1.

più efficiente, porremo la condizione che i processi che vi avvengono siano reversibili e in particolare che in nessun punto avvengano rimescolamenti tra porzioni di sostanza contenenti miscele a diversa concentrazione. Un impianto del genere rappresenta il limite cui possono tendere gli impianti reali.

Attraverso una generica sezione dell'impianto, in cui il rapporto delle concentrazioni sia  $r$ , passerà, nell'unità di tempo, la quantità di sostanza  $P(r)$ . Nella striscia infinite-

sima di impianto, compresa fra  $r$  ed  $r + dr$ , entrerà dunque una portata  $P(r)$  e ne uscirà una  $P(r + dr)$ . Nel suo interno una certa quantità di sostanza subirà la trasformazione di cui si è parlato, quantità che chiameremo  $dP'$ , in cui il rapporto delle concentrazioni non sarà più  $r$ , bensì  $r' = r/q$ . Questa quantità  $dP'$  esce e, se  $c' > c_i$ , viene reintrodotta nell'impianto per essere riutilizzata nel punto in cui la sostanza che vi transita ha eguale concentrazione. Contemporaneamente, nella stessa striscia, viene introdotta la quantità  $dP''$  che proviene dalla trasformazione della sostanza avente concentrazione  $qr$ ,

perchè la sua concentrazione  $((qr)' = qr/q = r)$  è eguale a quella della sostanza che transita nel punto  $r$ .

Per la conservazione della materia possiamo scrivere, per la sostanza e per l'isotopo desiderato, le due relazioni seguenti, valevoli nella striscia infinitesima:

$$(3) \quad \begin{cases} dP'' - dP' = P(r + dr) - P(r) \\ c dP'' - c' dP' = c(r + dr)P(r + dr) - c(r)P(r). \end{cases}$$

Sostituendo alle  $c$  le loro espressioni in  $r$  e risolvendo il sistema rispetto a  $dP'$ , si trova:

$$(4) \quad dP' = P(r) \cdot f(r) dr,$$

dove

$$(5) \quad f(r) = \frac{1}{q-1} \cdot \frac{q+r}{r(1+r)}.$$

Possiamo ora scrivere un'equazione che ci permetterà di ricavare la funzione  $P(r)$  lungo tutto l'impianto. Sezionando l'impianto in un punto qualsiasi, vediamo che in esso entra la portata  $P$  a concentrazione  $c$ , mentre ne esce una  $P_0$  a concentrazione  $c_0$ . Contemporaneamente esce la porzione riciclata all'indietro. Tale porzione si estende fino al punto in cui il rapporto delle concentrazioni vale  $qr$ , poichè la sostanza trattata e uscente a sinistra di tale limite (vedi fig. 2) ha  $c' < c$ .

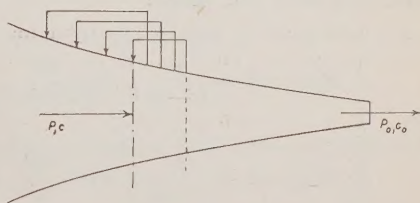


Fig. 2.

Scrivendo il bilancio di conservazione dell'isotopo desiderato e mettendo tutto in funzione di  $r$ , avremo:

$$(6) \quad P(r) \frac{r}{1+r} = P_0 \frac{r_0}{1+r_0} + \int_r^{qr} \frac{dP'}{dr} \frac{r'}{1+r'} dr,$$

dove i termini rappresentano la quantità di isotopo introdotta nello spezzone di impianto, quella estratta a concentrazione  $c_0$  e quella riciclata all'indietro dalla prima porzione. Sostituendo per  $dP'$  la sua espressione in funzione di  $P(r)$ , ponendo  $r' = r/q$  e facendo le seguenti posizioni:

$$(7) \quad \frac{P(r) \frac{r}{1+r}}{P(r_0) \frac{r_0}{1+r_0}} = K(r),$$



$$(8) \quad q = \frac{1}{p},$$

$$(9) \quad x = \frac{r_0}{r},$$

si ottiene infine:

$$(10) \quad K(x) = 1 + \frac{p}{1-p} \int_{px}^x K(x') \frac{dx'}{x'},$$

che è l'equazione integrale che descrive il processo. La funzione  $K$  fornisce la portata di isotopo desiderato lungo l'impianto, avendo assunto come unitaria quella che esce dall'estremità a concentrazione  $c$ .

L'equazione scritta tuttavia non è valevole nell'ultimo tratto dell'impianto, in cui  $r$  è compreso fra  $r_0/q$  ed  $r_0$ , poichè non si ha il riciclo delle concentrazioni superiori che non esistono. L'equazione va riscritta tenendo presente che i limiti di integrazione nella (6) sono ora  $r$  ed  $r_0$ , mentre  $dP'$ , come è immediato verificare, conserva la sua espressione. Facendo ancora le posizioni (7), (8) e (9), allora:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(x) = 1 + \frac{p}{1-p} \int_1^x K(x') \frac{dx'}{x'}, \quad px < 1 \text{ (ultimo tratto),} \\ K(x) = 1 + \frac{p}{1-p} \int_{px}^x K(x') \frac{dx'}{x'}, \quad px > 1 \text{ (restante porzione dell'impianto)} \end{array} \right.$$

3. - La seconda delle (11), valevole in tutto il campo delle  $x$  salvo per  $x < 1/p$ , è formalmente eguale all'equazione che regola il rallentamento senza cattura dei neutroni, per quel che riguarda la distribuzione in energia <sup>(2)</sup>. La prima delle (11) è invece diversa nei due casi, cosicchè le due soluzioni esatte differiscono. Tuttavia, quando si è lontani dall'uscita dell'impianto, cioè  $x \gg 1/p$ , la seconda delle (11) ne è poco influenzata, quindi la soluzione asintotica del nostro problema è eguale alla soluzione asintotica trovata da PLACZEK.

Avremo cioè:

$$(12) \quad K_{as} = \frac{1}{1 + \frac{p}{1-p} \ln p} = \frac{1}{1 - \frac{\ln q}{q-1}}.$$

(2) G. PLACZEK: *Phys. Rev.*, **69**, 423 (1946).

$K_{as}$  fornisce la portata dell'isotopo desiderato (nella solita unità) quando si è lontani dall'uscita dell'impianto. In particolare se  $P_i$  e  $c_i$  sono portata e concentrazione all'ingresso (e  $c_i \ll c_0$ ), si ha:

$$(13) \quad K_{as} = \frac{P_i c_i}{P_0 c_0} = \frac{1}{\eta}; \quad 1 - \frac{\ln q}{q-1} = \eta,$$

dove  $\eta$ , resa dell'impianto, è definita come rapporto fra la quantità di isotopo uscente concentrata e quella entrante diluita. Poichè  $q > 1$ , è sempre  $\eta < 1$ , raggiungendo il valore unitario solo per  $q \rightarrow \infty$ . Se  $q$  è poco diverso dall'unità, ponendo  $\Delta q = q - 1 \ll 1$ , si ha:

$$(14) \quad \eta = \sim \Delta q / 2.$$

La soluzione esatta del sistema (11) si può trovare, seguendo lo stesso procedimento usato dal PLACZEK (vedi Appendice). La soluzione nell'ultimo intervallo, come si ricava immediatamente derivando la prima delle (11) e integrando l'equazione differenziale che se ne ricava è:

$$(15) \quad K_0(x) = x^{p/(1-p)}, \quad 1 < x < 1/p.$$

Nel tratto generico di impianto in cui  $x$  è compreso fra  $p^{-n}$  e  $p^{-(n+1)}$  si ha:

$$(16) \quad K_n(x) = J_n(z) K_0(x),$$

dove l'indice  $n$  sta ad indicare che la  $K(x)$  è definita dalla (16) nell'intervallo  $p^{-n} < x < p^{-(n+1)}$ , e dove:

$$(17a) \quad z = \sigma \ln p^n x; \quad \sigma = \frac{p^{1/(1-p)}}{1-p},$$

$$(17b) \quad J_n(z) = \sum_m^n J_{n-m}(0) \frac{(-z)^m}{m!},$$

$$(17c) \quad J_n(0) = \sum_m^{n-1} (m-n)^m \frac{\zeta^m}{m!},$$

$$(17d) \quad \zeta = \sigma \ln \frac{1}{p} = \sigma \ln q.$$

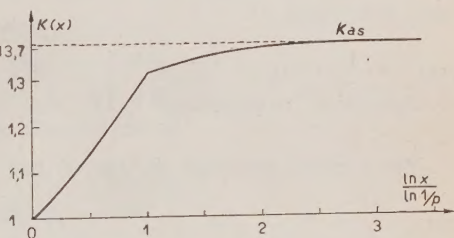


Fig. 3.

In fig. 3 è riportato l'andamento della  $K(x)$  per  $q = 9$  ( $p = 0,11111\dots$ ;  $\sigma = 0,094978$ ;  $\zeta = 0,208688$ ;  $J_0(0) = 1$ ;  $J_1(0) = 1$ ;  $J_2(0) = 0,79131$ ;  $J_3(0) = 0,60440$ ). In questo caso, la differenza relativa rispetto a  $K_{as}$  è inferiore all'1% dopo il secondo intervallo e all'1‰ dopo il terzo.

Determinato  $K(x)$ , si ricava immediatamente la  $P(r)$  che serve al dimensionamento dell'impianto.

4. - Il consumo di energia, sempre altissimo, in una separazione isotopica, proviene dal fatto che l'energia spesa nella trasformazione fisica o chimico-fisica, che la sostanza subisce in un certo punto dell'impianto, non è in generale recuperata, quando la sostanza subisce la trasformazione opposta, per essere riciclata nell'impianto, poichè le due trasformazioni non sono praticamente reversibili. Le quantità di lavoro (o di calore trasformabile in lavoro) che devono essere degradate, data la diminuzione di entropia legata allo smescolamento  $\Delta S_m = \sum c_i R \ln c_i$  ( $i = 1, 2$ ) ( $R$  costante dei gas), è, come ordine di grandezza,  $10^{-8}$  volte quella precedente e perciò del tutto trascurabile.

Il consumo di energia  $C$  è quindi proporzionale alla quantità di materiale trattato, cioè:

$$(18) \quad C = (1 - \gamma) R \int_{c_i}^{c_0} dP',$$

dove  $R$  è il consumo unitario, cioè il consumo di energia speso per trattare l'unità di sostanza e  $\gamma$  è la frazione di energia recuperabile. Il consumo specifico  $C_s$ , cioè il consumo per unità di quantità di isotopo prodotta sarà quindi:

$$(19) \quad C_s = \frac{(1 - \gamma) R \int_{c_i}^{c_0} dP'}{P_0 c_0}.$$

Introducendo al posto di  $dP'$  la sua espressione in funzione di  $P(r)$  e al posto di quest'ultima la sua espressione asintotica, il che porta generalmente ad un errore trascurabile nel computo della quantità totale di sostanza trattata, si ottiene:

$$(20) \quad C_s = \frac{(1 - \gamma) R}{1 - \frac{1}{q-1}} \left\{ \frac{q}{q-1} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{q-1} \ln \frac{r_0}{r_i} \right\}.$$

Per  $q$  molto prossimo ad uno, si ha:

$$(21) \quad C_s \approx \frac{2(1 - \gamma) R}{\Delta q^2} \left\{ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0} + \ln \frac{r_0}{r_i} \right\}.$$

In tal modo il consumo specifico dipende, oltre che dalle concentrazioni iniziale e finale dell'isotopo desiderato, solo dalle costanti  $q$ ,  $R$  e  $\gamma$  caratteristiche dell'impianto. Si possono in tal modo confrontare rapidamente due diversi processi per ottenere una stessa separazione isotopica. Ad esempio, la produzione puramente elettrolitica dell'acqua pesante, partendo dalla concentrazione isotopica nell'acqua naturale  $c_i \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  e arrivando, ad esempio, a  $c_0 = 0,99$ , supposto  $q = 6$ ,  $R = 5$  kWh/litro e  $\gamma = 0$  (bruciamento



completo dei gas che si ottengono, senza ricupero di energia non può avvenire con una spesa di energia minore di  $\sim 94\,000$  kWh/litro (si trascura qui il fatto economico che l'impianto produce Idrogeno che, negli stadi a concentrazione più bassa, non è bruciato).

Gli impianti reali si discostano da quelli ideali, perchè essi non evitano completamente il rimescolamento il quale provoca un aumento dell'entropia del sistema, che deve essere eliminato a spese di trasformazioni più o meno irreversibili con aumento quindi del consumo di energia spesa nella separazione.

A titolo di esempio riportiamo in tabella i dati relativi al consumo per un impianto ideale per la separazione elettrolitica dell'acqua pesante al 99,9%, partendo da una soluzione al 2%, e quello di un impianto reale continuo (costituito da un certo numero di stadi in cui son costanti, nel tempo, portata entrante, uscente e riciclata all'indietro, ed in cui la concentrazione di questa è eguale alla concentrazione che alimenta lo stadio precedente), in funzione del fattore di separazione. È assunto come unitario il consumo relativo alla condizione  $q = \infty$ . Il ricupero di energia è supposto nullo ( $\gamma = 0$ ).

$q =$	6	8	10	12	15	$\infty$
Impianto ideale . . . . .	1,95	1,67	1,53	1,46	1,35	1
Impianto reale (continuo)	3,14	2,60	2,28	2,10	1,84	1

#### APPENDICE

Per trovare la soluzione esatta delle (11), trasformiamo la seconda in un'equazione differenziale, derivando rispetto ad  $x$ :

$$(22) \quad K'(x) = \frac{p}{1-p} \left[ \frac{K(x)}{x} - \frac{K(px)}{px} \right].$$

Poniamo inoltre:

$$K(x) = J(x)K_0(x),$$

dove  $K_0(x) = x^{p/(1-p)}$  è la soluzione valevole nell'ultimo tratto (ove manca il riciclo). La (22) diviene:

$$(23) \quad J'(x) = -\sigma \frac{J(px)}{px}, \quad \sigma = \frac{p^{1/(1-p)}}{1-p}.$$

Seguendo lo stesso metodo di PLACZEK dividiamo il campo delle  $x$  in

intervalli di estremi  $p^n, p^{n+1}, \dots$ , ecc., segnati con l'indice  $n$ . Nell'intervallo  $n$ -esimo sostituiamo alla  $x$  la variabile  $z = \sigma \ln p^n x$ . La funzione  $J(x)$  verrà allora spezzata in tante  $J_n(z)$  e la  $K(x)$  assumerà la forma

$$K_n(x) = J_n(z)K_0(x).$$

Allora, tenendo presente che nel punto  $x/p$  il valore della  $z$  è lo stesso, ma la trasformazione di variabile è diversa da quella nel punto  $x$ , la (23) diviene:

$$(24) \quad -J(x) = \frac{x}{\sigma} J'_x \left( \frac{x}{p} \right),$$

$$(25) \quad -J_{n-1}(z) = \frac{x}{\sigma} J'_z \left( \frac{x}{p} \right) z'_n(x) = \frac{x}{\sigma} J'_n(z) \frac{\sigma}{x} = J'_n(z).$$

Questa, integrata, dà:

$$J_n(z) = - \int_0^z J_{n-1}(z) dz + J_n(0),$$

poichè, per  $z = 0$ ,  $J_n(z) = J_n(0)$ .

Tenendo presente che  $J_0(z) = 1$  e che, dovendo  $K(x)$  essere continua, è  $J_n(0) = J_{n-1}(\zeta)$  dove  $\zeta = \sigma \ln p^{-1}$ , si ricavano la (17b) e la (17c).

## SUMMARY

The cascade for separating isotopes without mixing inefficiency is studied. Results are drawn which can be used to check the efficiency of real cascades against this standard of maximum efficiency physically attainable.



## Sulla perdita di energia di mesoni veloci per creazione di coppie.

M. MANDÒ e L. RONCHI jr.

*Istituto di Fisica dell'Università - Firenze*

(ricevuto il 10 Novembre 1951)

**Riassunto.** — Sfruttando opportunamente alcune formule per le sezioni d'urto date dal RACAH <sup>(1)</sup> abbiamo calcolato la perdita di energia sopra scritta in modo quantitativamente esatto, ma nell'ipotesi alquanto restrittiva che lo schermo degli elettroni sia trascurabile. Il risultato, per il caso dei mesoni  $\mu$ , è dato dalla formula (20); una valutazione un po' grossolana dell'effetto di schermo porterebbe a moltiplicare il secondo membro per  $\sim 0,7$ ; il valore adottato da HAYAKAWA e TOMONAGA <sup>(3)</sup>  $(-1/E)(dE/dx)_p = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ , per mesoni  $\mu$  in roccia ( $Z = 10$  e  $A = 20$ ) rappresenta perciò, come valore medio, una discreta approssimazione nel campo di energie da 100 a 500 GeV, ma per un calcolo un po' preciso la dipendenza logaritmica di  $(-1/E)(dE/dx)_p$  dall'energia, come risulta dalla (20), va presa in considerazione.

### 1. — Introduzione.

La perdita di energia per creazione di coppie, nel caso di particelle pesanti, può diventare dello stesso ordine di grandezza e superare la perdita per radiazione, pur riferendosi ad un processo del 2° ordine, a causa della diversa dipendenza della sezione d'urto dalla massa della particella e dall'energia da essa perduta nel singolo urto. Ambedue i processi (radiazione e creazione di coppie) danno un contributo sensibile alla perdita totale solo per alte energie (per esempio  $> 100$  GeV, nel caso di un mesone); quando perciò si debba calcolare il percorso di una particella di grande energia, occorre valutare con una certa esattezza anche la perdita per creazione di coppie. Noi concentreremo particolarmente l'attenzione sui mesoni  $\mu$  di alta energia, che interessano nello studio dei raggi cosmici sotto roccia.

Il problema è, in via di principio, estremamente semplice, giacchè si riduce al calcolo dell'integrale

$$(1) \quad \left( -\frac{dE}{dx} \right)_p = \frac{N}{A} \int_{\frac{1}{2}mc^2}^{W_0 - Mc^2} \varepsilon q(\varepsilon, W_0) d\varepsilon,$$

dove  $(-dE/dx)_p$  è la cercata perdita di energia per unità di percorso ( $x$  e  $dx$  in  $\text{g cm}^{-2}$ ), dovuta alla creazione di coppie,  $N$  il numero di Avogadro,  $A$  il peso atomico medio del materiale attraversato,  $q(\varepsilon, W_0) d\varepsilon$  la sezione d'urto per creazione di una coppia di energia tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$  da parte della particella in questione (di energia  $W_0$ ).

Disgraziatamente il problema del calcolo di  $q(\varepsilon, W_0)$ , pur essendo risolto in via di principio da molto tempo <sup>(1)</sup>, porta all'atto pratico a calcoli talmente laboriosi e complicati che la sua espressione esplicita è conosciuta solo per alcuni casi limite e contiene spesso delle costanti non ben precisate che rendono difficile o impossibile un calcolo quantitativo. I lavori più completi sull'argomento sono quelli di BHABHA <sup>(2)</sup>, le cui formule sono però soggette alle limitazioni sopra dette e costringono HAYAKAWA e TOMONAGA <sup>(3)</sup>, che le hanno adoperate, a estrapolare le formule stesse fuori del loro campo di validità, e quello di RACAH <sup>(4)</sup>, che spinge più avanti il calcolo esatto, ma non tiene conto dell'effetto di schermo degli elettroni del nucleo urtato. Nel presente lavoro trascureremo anche noi tale effetto e, prendendo le mosse dai risultati di RACAH, cercheremo, con tale unica limitazione, di giungere ad una valutazione sufficientemente esatta di  $(-dE/dx)_p$ .

Nonostante la limitazione posta riteniamo utile tale calcolo perchè:

1) otterremo un limite superiore sicuro (e non molto lontano dal valore effettivo) per le perdite in questione, laddove si conosceva solo un ordine di grandezza;

2) un confronto fra i risultati del calcolo attuale esatto e i vari metodi approssimati connessi con le formule limite note fornisce un controllo della bontà di tali metodi e può suggerire il modo migliore di applicarli, anche tenendo conto dell'effetto di schermo, problema questo che ci proponiamo di affrontare in un secondo tempo.

<sup>(1)</sup> Cfr. ad esempio, bibliografia in W. HEITLER: *Quantum Theory of Radiation* (Oxford, 1944, reprinted 1949), pag. 203.

<sup>(2)</sup> H. J. BHABHA: *Proc. Roy. Soc.*, A **152**, 559 (1935); *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **31**, 394 (1935).

<sup>(3)</sup> S. HAYAKAWA e S. TOMONAGA: *Progr. of Theor. Phys.* **4**, 287 (1949); *Phys. Rev.*, **75**, 1958 (1949).

<sup>(4)</sup> G. RACAH: *Nuovo Cimento*, **14**, 93 (1937).

## 2. — Notazioni.

Nel seguito useremo:

A) i seguenti valori numerici delle costanti fondamentali:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \quad (\text{raggio classico dell'elettrone}) = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ cm};$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{costante di struttura fine}) = 1/137;$$

$$mc^2 \quad (\text{energia di riposo dell'elettrone}) = 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV};$$

$$N \quad (\text{numero di Avogadro}) = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mole}^{-1};$$

B) le seguenti notazioni generali:

$Z'e$ ,  $Ze$  — carica della particella incidente e del nucleo dell'atomo urtato, rispettivamente;

$w_0$ ,  $w$  — energia totale dell'elettrone e del positrone creati, rispettivamente;

$W_0$ ,  $W$  — energia della particella incidente, prima e dopo l'urto col nucleo  $Ze$ , rispettivamente;

$\varepsilon = w + w_0 = W_0 - W$ , energia totale della coppia creata;

$M$  — massa della particella incidente (numericamente, per il caso dei mesoni  $\mu$ , assumeremo  $M = 215 m$ );

$\xi_0 = \frac{W_0}{Mc^2}$  = fattore di Lorentz della particella incidente;

$q(\varepsilon, W_0) d\varepsilon$  = sezione d'urto per la creazione di coppie di energia fra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ ;

$N(\varepsilon, w, W_0) d\varepsilon dw$  = sezione d'urto per la creazione di una coppia di energia tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$ , il cui positrone abbia energia da  $w$  a  $w + dw$ ;

C) le seguenti comode posizioni:

$$t = \frac{2w}{\varepsilon} - 1 = 1 - \frac{2w_0}{\varepsilon}, \quad \varrho = \frac{m}{M}, \quad v = \frac{\varepsilon}{\xi_0 mc^2}, \quad u^2 = \frac{4W_0 W}{\varepsilon^2} \varrho^2, \quad \lambda = \frac{W}{W_0},$$

$$z = \frac{1}{u}, \quad \zeta^2 = 1 + u^2, \quad \eta^2 = \frac{W_0 W}{M^2 c^4} = \xi_0^2 \lambda, \quad y = \varrho v = \frac{\varepsilon}{W_0}, \quad C = \frac{Z^2 Z'^2 \alpha^2 r_0^2}{\pi}.$$



### 3. — Schema generale del calcolo e valutazione di $q(\varepsilon, W_0)$ .

Per il calcolo dell'integrale (1) dividiamo l'intervallo d'integrazione in quattro parti:

$$a) \quad 2mc^2 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{50} \xi_0 mc^2 ;$$

$$b) \quad \frac{1}{50} \xi_0 mc^2 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{5} \xi_0 mc^2 ;$$

$$c) \quad \frac{1}{5} \xi_0 mc^2 \leq \varepsilon \leq 19,1 \xi_0 mc^2 ;$$

$$d) \quad 19,1 \xi_0 mc^2 \leq \varepsilon \leq W_0 .$$

Il limite di separazione tra gli intervalli  $c)$  e  $d)$  corrisponde, più esattamente, a  $u = 0,1$ ; il limite superiore dell'intervallo  $d)$  è posto uguale a  $W_0$ , anzichè a  $W_0 - Mc^2$ , per comodità e senza errore sensibile a causa della piccolissima sezione d'urto quando è  $\varepsilon \sim W_0$ .

Nell'intervallo  $a)$  disponiamo dell'espressione esatta di  $S$ , calcolata da RACAH (4); ma, dato che il contributo percentuale di tale tratto è piccolo, preferiamo ricorrere ad una formula semi-empirica già usata da NISHINA, TOMONAGA e KOBAYASI (5) per il calcolo della sezione d'urto totale, con buoni risultati, come appare dal confronto con il calcolo esatto di RACAH (4).

Negli altri tre intervalli, dato che  $(-dE/dx)_w$  diventa considerevole solo per valori di  $\xi_0$  dell'ordine di qualche migliaio, potremo ammettere  $\varepsilon \gg mc^2$  in modo da poter utilizzare la formula (39) di RACAH (4), valida appunto con tale limitazione; essa però non fornisce direttamente la  $q(\varepsilon, W_0)$ , bensì la  $S(\varepsilon, W_0, w)$ ; dovremo quindi effettuare un'integrazione preliminare rispetto a  $w$ , cioè calcolare

$$(2) \quad q(\varepsilon, W_0) = \int_{mc^2}^{\varepsilon - mc^2} S(\varepsilon, W_0, w) dw .$$

A questo scopo effettuiamo la sostituzione  $w = \varepsilon(1 + t)/2$  e, per semplicità, estendiamo l'integrale all'intervallo  $0 \leq w \leq \varepsilon$ , con un errore che nel complesso risulterà piccolo, dato che ci serviremo della (2) solo per valori di  $\varepsilon \gg mc^2$ .

La (2) si può allora scrivere

$$(2') \quad q(\varepsilon, W_0) = \int_0^1 \varepsilon S(\varepsilon, W_0, t) dt ,$$

(5) Y. NISHINA, S. TOMONAGA e S. KOBAYASI: *Scient. Papers Inst. Phys. Chem. Res.*, Tokio, **27**, 137 (1935).

dove l'integrando, con le posizioni (C), n. 2, ha l'espressione, facilmente ottenibile dalle (39) e (34) di RACAH,

$$\begin{aligned} \langle 3 \rangle \quad \varepsilon S(\varepsilon, W_0, t) = \frac{C}{\varepsilon} & \left\{ \left( \frac{1}{3} (1 + \lambda^2)(2 + t^2) + \frac{1}{6} v^2(1 - t^2)(3 + t^2) \right) B(t) - \right. \\ & - \left( \frac{1}{3} (1 + \lambda^2)(2 + t^2) + \frac{1}{6} v^2(1 - t^2) \right) \ln \frac{\zeta^2 - t^2}{1 - t^2} - \\ & \left. - \frac{2}{3} \lambda(3 + t^2)[D(t) + 1] + \frac{2}{3} \lambda + \frac{2}{3} \lambda \frac{u^2(1 - t^2)}{\zeta^2 - t^2} D(t) - \frac{4}{3} \lambda \frac{\varrho^2}{\zeta^2 - t^2} D(t) \right\}. \end{aligned}$$

Qui, per brevità si è posto:

$$\langle 3' \rangle \quad B(t) = \left( 2 \ln \eta + \frac{3}{2} \ln(1 - t^2) - \frac{1}{2} \ln(\zeta^2 - t^2) \right) \ln \frac{\zeta^2 - t^2}{1 - t^2} - R\left(\frac{u^2}{1 - t^2}\right)$$

$$\langle 3'' \rangle \quad D(t) = 2 \ln \eta + 2 \ln(1 - t^2) - \ln(\zeta^2 - t^2) - 2,$$

mentre si è usata la lettera  $R$  per indicare la trascendente non elementare <sup>(6)</sup> definita da

$$\langle 4 \rangle \quad R(x) = \int_0^x \frac{\ln(1 + y)}{y} dy.$$

Si constata facilmente che l'ultimo termine scritto nella (3), e cioè  $\frac{4}{3} \lambda \frac{\varrho^2}{\zeta^2 - t^2} D(t)$ , è in ogni caso trascurabile rispetto al resto, a causa del fattore  $\varrho^2$ . Trascurandolo senz'altro, ed effettuando la laboriosa integrazione (2'), si ottiene un risultato che può ridursi alla forma

$$\begin{aligned} \langle 5 \rangle \quad \frac{\varepsilon}{C} q(\varepsilon, W_0) = & \left\{ \left( \frac{4}{3} (1 + \lambda^2) + v^2 \right) [E_0(\zeta) - E_0(1)] + \right. \\ & + \left( \frac{2}{3} (1 + \lambda^2) - \frac{2}{3} v^2 \right) [E_2(\zeta) - E_2(1)] - \frac{1}{3} v^2 [E_4(\zeta) - E_4(1)] - \\ & - \frac{2}{3} \lambda u^4 \cdot \frac{1}{\zeta} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \lambda \left( -\frac{40}{9} + \frac{4}{3} u^2 \right) \left. \right\} \ln \eta + \\ & + \left( -\frac{2}{3} (1 + \lambda^2) - \frac{1}{6} v^2 + \frac{2}{3} \lambda \frac{3 + 2u^2}{1 + u^2} \right) E_0(\zeta) + \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup> In qualche caso ci avverrà di usare nel seguito tale trascendente con la notazione più frequentemente adottata da altri autori  $\psi(x) = -R(-x)$ ; cfr., ad esempio, N. H. ABEL: *Oeuvres complètes* pag. 189, vol. II, (Cristiania, 1881).

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{2}{3} (1 + \lambda^2) + \frac{1}{6} v^2 - 4\lambda + \frac{4}{3} \lambda u^2 + \frac{2}{15} \lambda (2 + u^2) - \frac{4}{9} u^2 (1 + \lambda^2 - v^2) \right) E_0(1) + \\
& + \left( -\frac{7}{9} (1 + \lambda^2) + \frac{67}{90} v^2 + \frac{2}{5} \lambda \right) E_2(\zeta) + \left( \frac{7}{9} (1 + \lambda^2) - \frac{67}{90} v^2 - \frac{4}{5} \lambda \right) E_2(1) + \\
& + \frac{2}{15} v^2 [E_4(\zeta) - E_4(1)] - \left( \frac{7}{6} (1 + \lambda^2) + \frac{8}{15} v^2 \right) I_1(1) + \\
& + \left( -\frac{8}{45} v^2 + \frac{16}{45} \lambda + \frac{1}{15} \lambda u^2 + \frac{1}{6} \lambda \frac{u^4}{1 + u^2} - \frac{1}{3} (1 + \lambda^2) - \frac{1}{18} \zeta^2 (1 + \lambda^2) \right) I_1(\zeta) + \\
& + \left( \frac{14}{9} (1 + \lambda^2) + \frac{32}{45} v^2 \right) I_2(\zeta) + \\
& + \left( -\frac{8}{15} \lambda \zeta^2 (1 + \zeta^2) - \frac{4}{3} \lambda u^4 + \frac{4}{9} (1 + \lambda^2) u^2 \zeta^2 - \frac{16}{9} \lambda \zeta^2 \right) I_3(\zeta) - \\
& - \left( \frac{7}{9} (1 + \lambda^2) + \frac{16}{45} v^2 \right) K_1(\zeta) + \frac{1}{18} (1 + \lambda^2 - v^2) u^2 \ln^2 u^2 + \frac{2}{3} \lambda u^4 \cdot \frac{1}{\zeta} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \\
& - \frac{1}{6} \lambda \frac{u^4}{1 + u^2} \ln^2 u^2 - \frac{1}{15} \lambda (2 + u^2) \ln^2 u^2 + \lambda \left( \frac{26}{9} - \frac{4}{3} u^2 \right),
\end{aligned}$$

dove

$$(6) \quad E_n(\zeta) = \int_0^1 t^n \ln(\zeta^2 - t^2) dt \quad (n = 0, 2, 4)$$

sono integrali elementari, di cui è inutile riportare l'espressione esplicita,  $K_1(\zeta)$  è dato da

$$(7) \quad K_1(\zeta) = \int_0^1 R \left( \frac{\zeta^2 - 1}{1 - t^2} \right) dt = 2E_0(\zeta) - 2E_0(1) + 2 \ln \frac{\zeta - 1}{2} \ln \frac{\zeta + 1}{2},$$

mentre  $I_1(\zeta)$ ,  $I_2(\zeta)$ ,  $I_3(\zeta)$  sono trascendenti non elementari, esprimibili mediante la  $R(x)$  (formula (4)) o la  $\psi(x)$  (nota (6)), come segue:

$$\begin{aligned}
(8) \quad I_1(\zeta) &= \int_0^1 \ln^2(\zeta^2 - t^2) dt = \\
&= -(\zeta - 1) \ln^2(\zeta - 1) - 2(\zeta - 1) \ln 2\zeta \ln(\zeta - 1) + \\
&+ 2(\zeta + 1) \ln(\zeta - 1) \ln(\zeta + 1) - 2(\zeta + 1) \ln 2\zeta \ln(\zeta - 1) + \\
&+ (\zeta + 1) \ln^2(\zeta + 1) - 4E_0(\zeta) - \frac{\pi^2}{3} \zeta + 2\zeta \ln^2 2\zeta + 4\zeta \psi \left( \frac{\zeta - 1}{2\zeta} \right),
\end{aligned}$$



$$(9) \quad I_2(\zeta) = \int_0^1 \ln(\zeta^2 - t^2) \ln(1 - t^2) dt = \\ = -(\zeta - 1) R\left(\frac{2}{\zeta - 1}\right) - (\zeta + 1) \psi\left(\frac{2}{\zeta + 1}\right) - 2(1 - \ln 2) E_0(\zeta) + 4.$$

$$(10) \quad I_3(\zeta) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - t^2)}{\zeta^2 - t^2} dt = \\ = \frac{1}{2\zeta} \left\{ -\psi\left(\frac{2}{\zeta + 1}\right) - R\left(\frac{2}{\zeta - 1}\right) + 2 \ln 2 \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right\}.$$

La formula esatta (5), oltre ad essere molto complicata, è anche poco adatta al calcolo numerico, non appena  $u$  sia grande, oppure piccolo, rispetto a 1. È opportuno quindi procurarsi delle espressioni limite della (5) per valori di  $u$  molto piccoli e molto grandi.

Nel caso limite  $\varepsilon \ll \xi_0 mc^2$  ( $u^2 \gg 1$ ,  $v^2 \ll 1$ ,  $z^2 \ll 1$ ,  $\zeta \gg 1$ ) e, praticamente, in tutto l'intervallo  $b$ ), un laborioso passaggio al limite fornisce, della (5) l'espressione semplificata

$$(11) \quad \frac{\varepsilon}{C} q'(\varepsilon, W_0) = \frac{56}{9} \left( \ln \frac{2\varepsilon}{mc^2} - \frac{109}{42} \right) \left( \ln \frac{\xi_0 mc^2}{\varepsilon} + \frac{10}{21} \right) + \left( \frac{7}{9} \pi^2 - \frac{6994}{567} \right),$$

che si sarebbe potuta dedurre anche, direttamente, dalla (48) di RACAH, per derivazione. Detta formula, a meno del termine additivo  $(7\pi^2/9) - 6994/567 = -4,65874$  coincide anche con analoga formula di BHABHA (che però contiene due costanti dell'ordine dell'unità entro il logaritmo, costanti precisate nella (11)), nonché con quella che si sarebbe ottenuta applicando il metodo di von Weizsäcker alla ben nota formula di BETHE e HEITLER (7) per la materializzazione dei raggi  $\gamma$  quando  $\varepsilon \gg mc^2$ ; anche qui la costante indeterminata caratteristica del metodo viene precisata ( $\ln k = 10/21$ , in buon accordo col valore  $1/2$  suggerito da NISHINA, TOMONAGA e KOBAYASI (5)).

Nel caso limite opposto,  $\xi_0 mc^2 \ll \varepsilon$  (cioè  $u^2 \ll 1$ ,  $(\zeta - 1) \ll 1$ ), quando si supponga anche di poter trascurare termini in  $\varepsilon^3/W_0^3$  rispetto all'unità (pur conservando i termini in  $\varepsilon/W_0$ ) si ottiene la formula limite:

$$(12) \quad \frac{\varepsilon}{C} q''(\varepsilon, W_0) = \lambda u^2 \left\{ \left( 2 - \frac{4}{3} \ln \frac{u}{2} \right) \ln \eta + \right. \\ \left. + \left( -\frac{2}{3} \ln^2 u + 3 \ln u + \frac{2}{3} \ln^2 2 - \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} - \frac{17}{4} \right) \right\}.$$

Praticamente potremo usare questa formula in tutto l'intervallo  $d$ ) dato che i valori alti di  $\varepsilon$ , per cui l'approssimazione  $\varepsilon^2 \ll W_0^2$  non sarebbe più lecita, contribuiscono molto poco alla perdita totale.

Vogliamo notare che l'espressione ottenuta per  $\varepsilon q(\varepsilon, W_0)$ , o  $\varepsilon q'(\varepsilon, W_0)$ , o

(7) H. A. BETHE e W. HEITLER: *Proc. Roy. Soc.*, A **146**, 83 (1934), formula (61).

$\varepsilon q''(\varepsilon, W_0)$ , può essere scritta come funzione di  $v$  e di  $\xi_0$ , la dipendenza esplicita da  $\xi_0$  avvenendo solo tramite  $\ln \eta = \ln \xi_0 + (1/2) \ln \lambda$ ; ciò posto, si verifica facilmente che il contributo alla perdita totale degli intervalli  $b)$ ,  $c)$ ,  $d)$  risulterà circa proporzionale a  $\xi_0$  e precisamente della forma  $\xi_0 mc^2 (a \ln \xi_0 + b)$  con  $a$  e  $b$  costanti; lo stesso non può dirsi per l'intervallo  $a)$ , ma, essendo il suo contributo piccolo e ristretto l'intervallo di valori  $\xi_0$  che interessano, potremo porre sotto tale forma, con buona approssimazione, anche la perdita totale.

Osserviamo infine che negli intervalli  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  potremo porre, con un errore minore dell'1%,  $\ln \eta = \ln \xi_0$ .

#### 4. - Integrazione rispetto ad $\varepsilon$ e risultati finali.

Nell'intervallo  $a)$  assumeremo, come preannunciato, per  $\varepsilon q(\varepsilon, W_0)$  l'espressione approssimata

$$(13) \quad \varepsilon q'''(\varepsilon, W_0) = 2C \left\{ \frac{28}{9} \left( \ln 2\varepsilon' - \frac{109}{42} \right) + \frac{4,31}{\varepsilon'} + \frac{28,46}{\varepsilon'^2} - \frac{53,57}{\varepsilon'^3} \right\} \left( \ln \frac{\xi_0}{\varepsilon'} + \frac{1}{2} \right),$$

dove per brevità si è posto  $\varepsilon' = \varepsilon/mc^2$ ; (cfr. l. c. <sup>(5)</sup>, formule (40), (26), etc.). NISHINA, TOMONAGA e KOBAYASI, dato che la (13) diventa grossolanamente inesatta quando  $\varepsilon$  è prossimo a  $2mc^2$ , nel calcolo della sezione d'urto totale, integrano a partire da  $\varepsilon = 3mc^2$ ; più semplicemente, e senza errore sensibile ai nostri scopi, noi abbiamo integrato a partire da  $\varepsilon = 2,71828 mc^2$ , ottenendo così, per le perdite relative a coppie con energia nell'intervallo  $a)$ , i valori  $P_a$ , riportati nella prima riga della tabella I.

TABELLA I. - Valori di  $AP_a/N \cdot mc^2 \cdot C$ .

	$\xi_0 = 1000$	$\xi_0 = 2000$	$\xi_0 = 3000$	$\xi_0 = 4000$	$\xi_0 = 5000$
dalla formula (13)	174	649	1 284	2 027	2 852
dalla formula (13) con correzione	135	571	1 164	1 863	2 643
valori adottati, formula (14)	106	572	1 175	1 866	2 622

Poichè la formula (13) non si raccorda per  $\varepsilon = \xi_0 mc^2/50$  con la formula (11), essendo anch'essa ottenuta, come quella di BHABHA, col metodo di von Weizsäcker, abbiamo ritenuto opportuno moltiplicare i risultati della formula (13) per il rapporto, calcolato per  $\varepsilon = \xi_0 mc^2/50$ , dei valori della sezione d'urto dati dalla (11) e dalla (13), ottenendo così i dati della seconda riga della tabella I;

infine, per le ragioni di comodità esposte poco sopra, abbiamo approssimato con la formula

$$(14) \quad P_a = \frac{N}{A} \cdot C \xi_0 m c^2 \cdot (0,26 \ln \xi_0 - 1,69),$$

cui corrispondono i valori della terza riga della tabella I.

Per l'intervallo *b*), usando la (11), si ottiene

$$(15) \quad P_b = \frac{N}{A} C \xi_0 m c^2 (3,17 \ln \xi_0 - 7,70).$$

Nell'intervallo *c*) dobbiamo usare la formula esatta (5) e ricorreremo quindi all'integrazione numerica; sceglieremo come variabile d'integrazione  $\ln z$  e calcoleremo i valori numerici della (5) nei punti  $z = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; 10$  (gli estremi corrispondono a quelli già fissati per l'intervallo); posto allora

$$(16) \quad \frac{\varepsilon}{C} q(\varepsilon, W_0) = A + B \ln \eta,$$

i risultati del calcolo numerico sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.

$z$	$A$	$B$	$Az \frac{dv}{dz}$	$Bz \frac{dv}{dz}$
0,1	— 50,5	13,12	— 10,10	2,621
0,2	— 30,0	9,10	— 11,98	3,633
0,5	— 12,3	4,57	— 12,28	4,551
1,0	— 5,32	2,192	— 10,54	4,344
2,0	— 2,015	0,850	— 7,91	3,338
5,0	— 0,485	0,190	— 4,62	1,818
10,0	— 0,152	0,0516	— 2,76	0,939

La quarta e quinta colonna della tabella II contengono  $Az(dv/dz)$  e  $Bz(dv/dz)$  che ovviamente vengono a figurare nell'integrando quando si effettui il cambiamento di variabile d'integrazione da  $\varepsilon$  a  $\ln z$ . Tale cambiamento, oltre a consentire di calcolare numericamente pochi valori dell'integrando, fornisce poi nel caso specifico una buona approssimazione numerica perchè i diversi valori dell'integrando vengono, come si vede dalla tabella II, ad essere dello stesso ordine di grandezza; l'integrazione è stata eseguita, sia graficamente, sia numericamente con un metodo alla Cavalieri-Simpson, convenientemente adattato per la diseuguaglianza degli intervalli, e così si è ottenuto

$$(17) \quad P_c = \frac{N}{A} C \xi_0 m c^2 (15,07 \ln \xi_0 - 41,65).$$



Infine nell'intervallo  $d$ ) potremo usare per l'integrazione la (12) che conviene esprimere in funzione di  $y$ , ottenendo così

$$(18) \quad P_a = \frac{N}{A} C \xi_0 m c^2 \cdot 4 \varrho \int_{19,1e}^1 \left( \frac{1-y}{y} \right)^2 G(y) dy,$$

avendo posto

$$(18') \quad G(y) = \left( 2 + \frac{2}{3} \ln \frac{y^2}{\varrho^2(1-y)} \right) \times \left( \ln \xi_0 + \frac{1}{2} \ln(1-y) \right) - \\ - \left\{ \frac{1}{6} \ln^2 \frac{y^2}{\varrho^2(1-y)} + \left( \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{3} \right) \ln \frac{y^2}{\varrho^2(1-y)} + \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{17}{4} - 2 \ln 2 \right) \right\}.$$

Il calcolo esatto dell'integrale al secondo membro della (18) è notevolmente complicato; data la non elevata precisione richiesta ( $P_a$  risulta piccolo rispetto a  $P_c$ ) e tenendo presente che, d'altra parte, la stessa formula di partenza (3) dà in questo tratto poco più forse dell'ordine di grandezza, abbiamo preferito l'integrazione grafica e numerica che dà

$$(19) \quad P_a = C \xi_0 m c^2 (0,77 \ln \xi_0 - 2,67).$$

Sommando la (14), la (15), la (17) e la (19), ricordando che  $\xi_0 m c^2 = \varrho W_0$  e indicando ora con  $E$  l'energia del mesone  $\mu$  incidente, otterremo infine:

$$(20) \quad - \left( \frac{dE}{dx} \right)_p = \frac{N}{A} C \varrho E (19,3 \ln \xi_0 - 53,7).$$

Ad esempio, per un mesone  $\mu$  in roccia, assumendo  $Z = 10$  e  $A = 20$  mediamente, per i valori  $\xi_0 = 1000$ ,  $\xi_0 = 2000$ ,  $\xi_0 = 4000$  si ha una perdita di energia relativa, dovuta a creazione di coppie, pari, rispettivamente, a

$$\left( - \frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \right)_p = 1,50 \cdot 10^{-6}; \quad 1,76 \cdot 10^{-6}; \quad 2,01 \cdot 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2.$$

A titolo di confronto possiamo ricordare che HAYAKAWA e TOMONAGA<sup>(3)</sup>, tenendo conto dell'effetto di schermo ma extrapolando al tratto  $c$ ) le formule limiti di BHABHA corrispondenti alle (11) e (12), senza alcun tratto di raccordo, adottano per il calcolo della relazione energia-percorso un valore medio

$$\left( - \frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \right)_p = 1,60 \cdot 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2.$$

Poichè da un raffronto dei loro risultati con quelli ottenibili senza tener conto dell'effetto di schermo con lo stesso loro metodo approssimato, si ricaverebbe per le perdite nei due casi un rapporto  $\sim 0,7 : 1$ , si può concludere che il valore adottato da tali autori per le perdite da creazione di coppie, nel campo di

energie da 100 a 500 GeV, fornisce in media una discreta approssimazione, probabilmente un po' in eccesso; a parte ciò, per calcoli un po' precisi, appare dai nostri risultati la necessità di tener conto della dipendenza di  $(-1/E)(dE/dx)$  dall'energia, quale è data dalla (20) (\*).

Ringraziamo i proff. RACAH e MORPURGO per aver gentilmente aderito a discutere con noi alcune questioni connesse col presente lavoro e per i suggerimenti scaturiti da tali discussioni.

(\*) *Aggiuna in bozze.* — Per effetto dello schermo tale dipendenza viene tuttavia ridotta, giacchè il fattore di riduzione diminuisce all'aumentare di  $\xi_0$  (il valore 0.7 sopra dato corrisponde esattamente a  $\xi_0 = 2000$ ).

## SUMMARY

It has been pointed out by HAYAKAWA and TOMONAGA <sup>(3)</sup> that the pair creation process must give a contribution to the energy loss by fast particles comparable to that of the radiation process. For  $\mu$ -mesons (energy  $> 100$  GeV) in rock ( $Z = 10$ ,  $A = 20$ ) they evaluate the average relative energy loss  $(-1/E)(dE/dx)_p$ , due to pair creation, to  $1.6 \cdot 10^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ , by extrapolating some approximate formulae for the cross section by BHABHA <sup>(2)</sup>. We carried out a similar calculation by using, as a starting formula, the differential cross section  $S(\epsilon, w, W_0) d\epsilon dw$  given by RACAH <sup>(4)</sup> (see our formula (3)), which holds exactly for  $\epsilon \gg mc^2$ , provided the effect of the screening can be neglected. Formula (5) for the cross section  $q(\epsilon, W_0) d\epsilon$  was then obtained; in the limit cases considered by BHABHA <sup>(2)</sup> it allows a determination of his constants, but still differs somewhat from his formulae. For losses in single small steps ( $\epsilon$  of the order of  $10 mc^2$ ) we used an approximate semi-empiric equation (cfr. our formula (13)) by NISHINA, TOMONAGA and KOBAYASI <sup>(3)</sup> and made some further approximation; the exact formula, also given by RACAH <sup>(4)</sup>, was too cumbersome to handle and the precision required could also be attained by such speedier method, owing to the small contribution of such losses to the total. By suitable methods of numerical integration the total loss was finally obtained (cfr. formula (20)). Since our starting formula neglects the screening, our result represents only an upper limit; a reasonable, though rough, estimate suggests that screening may reduce the second member of (20) by a factor  $\sim 0.7$ . It comes out, therefore, that, while Hayakawa and Tomonaga's is a fairly good average value, in the energy range 100 to 500 GeV, the energy dependence of  $(-1/E)(dE/dx)_p$  as given by (20), must be taken into account for an accurate evaluation <sup>(\*)</sup>. Main symbols are as follows:  $w_0$ ,  $w$  total energy of the electron, respectively, positron of the created pair;  $\epsilon = w + w_0$ ;  $M$ ,  $W_0$  rest mass and total energy of the impinging particle;  $W = W_0 - \epsilon$ ;  $S(\epsilon, w, W_0) d\epsilon dw$ , cross section for the creation of a pair with energy between  $\epsilon$  and  $\epsilon + d\epsilon$ , whose positron has energy between  $w$  and  $w + dw$ ;  $q(\epsilon, W_0) d\epsilon$ , see formula (2). Other not obvious symbols are defined algebraically in n. 2.

(\*) *Added in proofs.* — The screening, however, smooths down such dependence appreciably and makes Hayakawa and Tomonaga's estimate to be somewhat in excess.

## Sulle particelle $\alpha$ nella radiazione cosmica primaria.

G. SEGRÈ

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma*

(ricevuto il 22 Novembre 1951)

**Riassunto.** — Si notano delle gravi discordanze tra i risultati di vari autori che hanno studiato le particelle  $\alpha$  nella radiazione cosmica primaria. Da un'analisi dei dati sperimentali si ritiene di modificare i valori dei cammini liberi in aria e in emulsione, ottenendo con i nuovi valori un accordo più soddisfacente. In altre parole si propone di portare da 40 a circa 80 g cm<sup>-2</sup> il valore del cammino di assorbimento in aria, e da 39 a  $\sim 120$  g cm<sup>-2</sup> il cammino di interazione in emulsione fotografica. Tali valori non differiscono sostanzialmente da quelli che vengono assunti per i protoni. Si danno anche i valori corretti per l'intensità verticale al limite dell'atmosfera delle particelle  $\alpha$ , a 30° e a 51° di latitudine geomagnetica:  $I_0(30^\circ) = (4 \pm 1,5) \cdot 10^{-3}$  cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> sterad<sup>-1</sup> e  $I_0(51^\circ) = (18 \pm 6) \cdot 10^{-3}$  cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> sterad<sup>-1</sup>. Viene inoltre esposto dettagliatamente il calcolo matematico e si riportano i grafici di due curve il cui uso facilita grandemente il trattamento del problema che abbiamo studiato e di tutti i problemi analoghi, in particolare quelli relativi alle tracce pesanti.

### Introduzione.

Fra le varie specie di particelle che compongono la radiazione cosmica, le particelle  $\alpha$  giocano una parte che assume una notevole importanza quando si passi da osservazioni a bassa quota o ad altezze montane a esperienze negli strati più alti dell'atmosfera; esse costituiscono, dopo i protoni, la componente più cospicua della radiazione primaria, ed una determinazione dell'intensità di tale componente in rapporto all'intensità protonica ha un interesse ben noto per gli studi sull'origine dei raggi cosmici ed in genere in problemi di carattere cosmologico. Non meno importante è lo studio del comportamento delle particelle  $\alpha$  quando attraversano la materia; si tratta di particelle aventi



già una struttura complessa, e dalle quali si possono trarre informazioni per lo studio delle forze nucleari.

Il problema può essere trattato convenientemente, dal punto di vista sperimentale, col metodo delle emulsioni nucleari: esse permettono di realizzare con relativa facilità osservazioni ad altissima quota, ed offrono inoltre metodi abbastanza pratici per il riconoscimento e lo studio delle particelle  $\alpha$ . Ciò può essere fatto in una duplice direzione, considerando: *a*) le tracce isolate; *b*) le stelle che esse producono interagendo con nuclei dell'emulsione fotografica.

Molto pochi sono a tutt'oggi i lavori sperimentali riguardanti l'argomento <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup> e l'accordo fra i risultati che essi presentano è tutt'altro che soddisfacente. Basti citare che dai dati pubblicati da BRADT e PETERS, ottenuti col metodo *a*), si può trarre per l'intensità integrata alla quota e alla latitudine di lavoro di LORD un valore che è circa 8 volte il valore trovato da quest'ultimo con il metodo *b*).

Siamo stati quindi indotti ad analizzare criticamente i dati attualmente disponibili, e da tale analisi risulta quanto segue: in primo luogo, che la scarsità dei dati sperimentali è tale da non autorizzare, sull'argomento, nessuna conclusione che non sia quantitativamente grossolana e provvisoria; in secondo luogo che, comunque, i valori che sono stati finora assunti per alcune grandezze essenziali non sono i migliori che si possono trarre dai dati sperimentali sinora accertati.

I valori «migliori» che deduciamo in questa nota ci sembrano quindi più credibili di quelli sino ad ora accettati, non tanto perchè dotati di maggiore precisione (il dato da noi apportato <sup>(3)</sup> non ha che un minimo peso statistico) ma piuttosto perchè più coerentemente giustificati dai dati sperimentali.

### Relazioni matematiche fra le grandezze in esame.

Le grandezze fisicamente importanti nel nostro problema sono:

$I_0$  ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1}$ ) intensità verticale delle particelle  $\alpha$  al limite dell'atmosfera,

$L_a$  ( $\text{g cm}^{-2}$ ) cammino di assorbimento in aria,

$L_{em}$  ( $\text{g cm}^{-2}$ ) cammino di interazione in emulsione.

<sup>(1)</sup> H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **77**, 54 (1950).

<sup>(2)</sup> J. J. LORD: *Phys. Rev.*, **81**, 901 (1951).

<sup>(3)</sup> G. CORTINI, A. MANFREDINI e G. SEGRÈ: di prossima pubblicazione sul *Nuovo Cimento*.

<sup>(4)</sup> E. GARDNER: *Phys. Rev.*, **75**, 379 (1949).

I dati direttamente ottenibili nelle esperienze sono invece:  
con il metodo *a*)

$n$  = numero delle tracce (per  $\text{cm}^2$  di lastra e per giorno) dovute a particelle  $\alpha$ , che formano con il piano dell'emulsione un angolo minore di un certo valore  $\delta$ ; tale condizione è determinata dalla necessità che ogni traccia sia abbastanza lunga da poter essere identificata;

e con il metodo *b*)

$N_\alpha$  = numero di stelle per  $\text{cm}^3 \cdot \text{giorno}$  prodotte da particelle  $\alpha$ .

Le relazioni che sussistono fra queste grandezze, e di cui bisogna far uso per confrontare fra loro i dati sperimentali, non sono immediate: in particolare il numero di tracce osservate dipende strettamente dai fattori geometrici, e ciò complica non poco i calcoli in ogni problema pratico. Abbiamo cercato quindi in primo luogo di superare questa difficoltà, e ci siamo costruiti quali strumenti di lavoro due grafici che rendono i confronti molto semplici.

Assumiamo anzitutto che l'assorbimento in aria di un fascio collimato di particelle  $\alpha$  sia dato da una legge puramente esponenziale. Trascuriamo in questo modo l'assorbimento dovuto alle perdite di energia per ionizzazione; ad alta quota tale perdita non è che una piccola frazione dell'energia delle particelle da noi considerate, e quindi l'ipotesi fatta è lecita.

Per avere ora la relazione che sussiste tra  $N_\alpha$  e  $I_0$  il calcolo che si deve fare è noto: se  $J(x)$  è l'intensità integrata o (omnidirezionale) alla quota  $x$ , abbiamo

$$(1) \quad N_\alpha = \frac{J(x)}{L_{\text{em}}} \quad (L_{\text{em}} \text{ in cm}),$$

e d'altra parte abbiamo

$$(2) \quad J(x) = 2\pi I_0 G \left( \frac{x}{L_\alpha} \right),$$

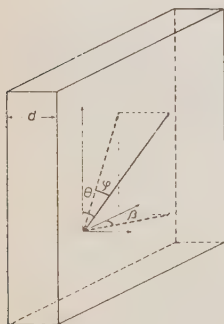


Fig. 1.

dove  $G(y) = \exp[-y] + yEi(-y)$  è il fattore di Gross, il cui grafico riportiamo in fig. 2.

Molto più laborioso è il calcolo relativo al metodo *a*). Supposta nota la distribuzione angolare  $I(\theta)$  delle particelle presenti nel luogo dell'esposizione in funzione dell'angolo zenitale, calcoliamo il numero  $n$  di tracce (per s e per  $\text{cm}^2$  di emulsione disposta verticalmente e di spessore  $d$ ) aventi una lunghezza  $> l$ , e formanti quindi col piano dell'emulsione un angolo  $< \delta = \arcsin d/l$ .

Consideriamo le tracce aventi direzione contenuta nell'angolo solido infinitesimo  $d\omega$  caratterizzato dagli angoli  $\theta$  e  $\beta$  ( $\beta$  è l'angolo azimutale, fig. 1).

Il flusso entro l'angolo solido  $(\theta, \theta + d\theta; \beta, \beta + d\beta)$  attraverso l'unità di superficie perpendicolare alla direzione considerata è

$$I(\theta) \sin \theta d\theta d\beta.$$

Il flusso attraverso l'unità di superficie parallela al piano della lastra sarà

$$d_2 n = I(\theta) \sin \varphi \sin \theta d\theta d\beta,$$

dove  $\varphi$  è l'angolo formato tra la traccia e il piano della lastra. Abbiamo  $\sin \varphi = \sin \theta \sin \beta$ , e quindi

$$d_2 n = I(\theta) \sin^2 \theta d\theta \sin \beta d\beta.$$

Per ottenere il flusso  $dn$  delle tracce contenute nell'angolo solido  $\theta, \theta + d\theta$  e di lunghezza  $> l$ , per ogni quadrante dobbiamo integrare

$d_2 n$  per  $\varphi$  variabile tra 0 e  $\delta$ , e quindi per  $\sin \beta$  variabile tra 0 e  $\sin \delta / \sin \theta$  (tra 0 e  $\pi/2$  se  $\theta < \delta$ ).

Abbiamo quindi, per  $\theta > \delta$

$$dn = 4I(\theta) \sin \theta (\sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \delta}) d\theta,$$

e per  $\theta < \delta$

$$dn = 4I(\theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Sostituendo  $I(\theta) = I_0 \exp[-x/L \cos \theta]$  si ha quindi <sup>(5)</sup>

$$(3) \quad n = 4I_0 \left[ \int_0^{\pi/2} \exp\left[-\frac{x}{L \cos \theta}\right] \sin^2 \theta d\theta - \int_{\delta}^{\pi/2} \exp\left[-\frac{x}{L \cos \theta}\right] \sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \delta} d\theta \right].$$

Tale espressione, nella quale figurano i due parametri  $L$  e  $\delta$ , può essere usata per un calcolo numerico diretto, ma è tutt'altro che comoda. Il calcolo che segue ci permette, però, di evitare questa difficoltà.

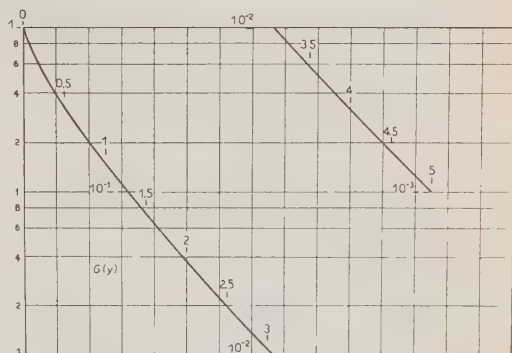


Fig. 2. — Fattore di Gross  $G(y) = \exp[-y] + yEi(-y)$ . L'intensità integrata alla profondità  $x$  è data da  $J(x) = 2\pi I_0 G(x/L)$  dove  $I_0$  è l'intensità verticale al limite dell'atmosfera e  $L$  il cammino di assorbimento in aria.

<sup>(5)</sup> H. L. BRADT e B. PETERS: *Phys. Rev.*, **77**, 60 (1950).

Sia

$$\frac{x}{L} = y, \quad \int_0^{\pi/2} \exp \left[ -\frac{y}{\cos \theta} \right] \sin^2 \theta \, d\theta = F(y).$$

Sostituendo, nel secondo integrale della (3),  $\cos \theta = \cos \delta \cos \psi$  si ha

$$\int_0^{\pi/2} \exp \left[ -\frac{x}{L \cos \delta \cos \psi} \right] \cos^2 \delta \sin^2 \psi \, d\psi = \cos^2 \delta \cdot F \left( \frac{y}{\cos \delta} \right),$$

e quindi

$$(4) \quad n = 4I_0 \left[ F(y) - \cos^2 \delta \cdot F \left( \frac{y}{\cos \delta} \right) \right].$$

Nel caso in cui si considerino tracce molto lunghe, si ha  $\cos \delta \simeq 1$  e quindi

$$(5) \quad n = 4I_0 \cdot \sin^2 \delta \cdot F(y).$$

La funzione  $F(y)$  può essere, con varie integrazioni per parti, posta sotto la forma

$$F(y) = \frac{1}{2} (1 - y^2) \left[ \frac{\pi}{2} - \int_0^y K_0(y) \, dy \right] - \frac{1}{2} y K_0(y) + \frac{1}{2} y^2 K_1(y),$$

dove  $K_0$  e  $K_1$  sono funzioni di Bessel modificate di seconda specie <sup>(6)</sup>.

Per valori piccoli di  $y$ , per i quali  $K_0$  diverge logarithmicamente, conviene usare l'espressione seguente:

$$\int_0^y K_0(y) \, dy = y K_0(y) + y^2 K_1(y) + \int_0^y Y^2 K_0(y) \, dy,$$

mentre per valori  $\gg 1$  conviene calcolare direttamente la  $F(y)$  per un valore piuttosto elevato di  $y$  e da questo discendere ai valori più bassi. In tal modo la precisione del calcolo è molto buona.

Abbiamo calcolato la  $F(y)$  per una gamma di valori più che sufficiente per

<sup>(6)</sup> A. GRAY, G. B. MATHEWS e T. M. MC ROBERT: *Bessel Functions* (New York, 1922), pag. 313.



le applicazioni, e ne riportiamo il grafico in fig. 3. L'uso di esso e delle equazioni (4) e (5) rende agevole e rapido il calcolo dei fattori geometrici per lastre esposte verticalmente.

### Analisi e critica dei dati sperimentali.

a) *Intensità delle particelle  $\alpha$  primarie.* — BRADT e PETERS (<sup>1</sup>), in uno studio sull'intensità delle varie particelle che compongono la radiazione primaria, danno i seguenti valori per l'intensità verticale delle particelle  $\alpha$  al limite della atmosfera

$$\text{a } 30^\circ \text{ di lat. geom. } I_0 = (9 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$$

$$\text{a } 51^\circ \text{ di lat. geom. } I_0 = (38 \pm 13) \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

Tali valori sono dedotti dal conteggio delle tracce isolate in lastre esposte rispettivamente a  $16 \text{ g cm}^{-2}$  e  $10 \text{ g cm}^{-2}$ . Le particelle  $\alpha$  vengono individuate con il conteggio dei granuli, e i dati sperimentali relativi sono presentati in due istogrammi (figg. 3 e 4 del lavoro citato). Questi istogrammi si riferiscono a tracce di lunghezza  $l \geq 750 \mu$  osservate in lastre di spessore  $d = 100 \mu$ . Essi mostrano, quando si tenga conto di un fondo continuo dovuto a particelle di carica unitaria, una distribuzione di particelle  $\alpha$  molto stretta intorno a  $4 K_{\min}$  per l'esposizione a  $30^\circ$  di lat. geom. mentre a  $51^\circ$  tale distribuzione va da 3,5 a 6 volte il minimo di ionizzazione; vi è cioè una coda verso le basse energie, ed essa è dovuta al fatto che il taglio geomagnetico a  $51^\circ$  è  $2,3 \text{ GeV}$ , corrispondenti a una ionizzazione di  $\sim 6 K_{\min}$ . Per ragioni che saranno chiare in seguito abbiamo calcolato il numero di particelle  $\alpha$  aventi energia  $> 4 \text{ GeV}$ , cioè al minimo di ionizzazione per le  $\alpha$ . Escludendo le tracce con  $K > 5 K_{\min}$  ne risulta una correzione di  $\sim 20\%$  sul valore di  $I_0$  a  $51^\circ$  di latitudine geomagnetica.

Le intensità riportate sopra sono state recentemente corrette dagli autori

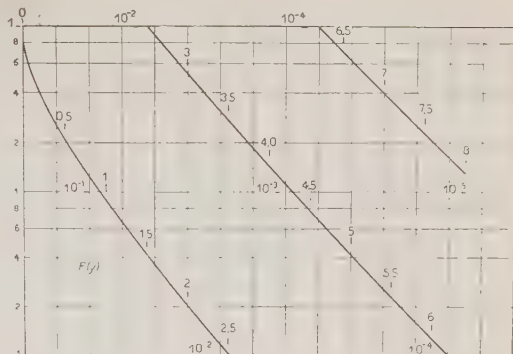


Fig. 3. — Fattore geometrico per lastre verticali  $F(y)$ . Il numero di tracce per unità di tempo che attraversano l'unità di superficie di una lastra verticale, formando con essa un angolo  $< \delta$  è dato da  $n = 4I_0[F(x/L) - \cos \delta F(x/L \cos^2 \delta)]$ .  $I_0$ ,  $x$  e  $L$  hanno i significati della figura precedente.

stessi <sup>(7)</sup> ed i nuovi valori sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \text{a } 30^\circ \quad I_0 &= (6 \pm 2) \cdot 10^{-3} \\ \text{a } 51^\circ \quad I_0 &= (26 \pm 9) \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Pensiamo che la correzione sia unicamente dovuta ad un miglioramento della statistica, e che i dati relativi alle condizioni dell'esperienza siano sempre quelli riferiti nell'articolo citato.

Facendo anche qui la riduzione del 20% si ha

$$\text{a } 51^\circ \quad I_0^{(\min)} = (21 \pm 7) \cdot 10^{-3}.$$

Notiamo che i valori per le intensità al limite dell'atmosfera sono stati calcolati da BRADT e PETERS a partire dai dati sperimentali assumendo un cammino di assorbimento in aria  $L_a = 40 \text{ g cm}^{-2}$ .

Gli errori comprendono sia l'errore statistico, che è circa del 15%, sia le incertezze dovute alle difficoltà insite nel metodo con cui vengono riconosciute le tracce.

b) *Frequenza delle stelle  $\alpha$ .* — Circa la frequenza delle stelle prodotte da particelle  $\alpha$ , esistono risultati di LORD <sup>(2)</sup> e di questo laboratorio <sup>(3)</sup>. LORD, lavorando a  $54^\circ$  e a  $28^\circ$  di latitudine geomagnetica, e alle quote di 15 e 48  $\text{g cm}^{-2}$ , trova

	a $54^\circ$	a $28^\circ$
$N_\alpha(15)$	107 stelle/ $\text{cm}^3$ al giorno	25 stelle/ $\text{cm}^3$ al giorno
$N_\alpha(48)$	54 stelle/ $\text{cm}^3$ al giorno	12 stelle/ $\text{cm}^3$ al giorno.

Questi dati si riferiscono alle stelle aventi nell'emisfero superiore un ramo con una ionizzazione pari a  $3 \div 5 K_{\min}$  (scelte cioè con lo stesso criterio con cui, sopra, abbiamo ottenuto  $I_0^{(\min)}$ ) corrette per un fondo continuo dovuto a particelle di carica unitaria situate nello stesso intervallo di ionizzazione. Sfortunatamente non sappiamo gli errori statistici da cui sono affette le misure di LORD.

In questo laboratorio, in-lastre lanciate a Milano alla latitudine geomagnetica di  $47^\circ$  e che hanno raggiunto una quota massima di  $35 \text{ g cm}^{-2}$  (per l'andamento del volo vedi il lavoro citato), abbiamo trovato, su un volume esplorato di  $5,1 \text{ cm}^3$ , 13 stelle  $\alpha$  con un numero di rami sciame  $S \geq 4$ . La distribuzione è stata extrapolata fino a  $S \geq 1$  e si è valutato a  $22 \pm 7$  il numero di stelle  $\alpha$  con almeno un secondario al minimo.

c) *Cammini liberi desumibili dal confronto dei dati sperimentali.* — Notiamo anzitutto che il taglio geomagnetico per le particelle  $\alpha$  alle latitudini

---

<sup>(7)</sup> Comunicazione del prof. B. Rossi in un seminario tenuto recentemente a Roma.

dei lavori citati è a  $54^\circ$ ,  $51^\circ$  e  $47^\circ$ , rispettivamente 1,5 GeV, 2,3 GeV e 3,8 GeV e quindi non agisce sulle particelle  $\alpha$  al minimo; per le latitudini più basse, le cose vanno diversamente, ma un calcolo grossolano mostra che, al passare da  $30^\circ$  a  $28^\circ$  l'intensità delle  $\alpha$  primarie varia al massimo del 10%, e quindi non ne terremo conto.

Si tratta ora di confrontare i dati delle diverse esperienze. Una prima contraddizione si può rilevare allorché si deduca il cammino di assorbimento in aria dalla frequenza delle stelle trovate da LORD alle quote di 15 e 48 g cm $^{-2}$  e lo si confronti con il valore  $L_a = 40$  g cm $^{-2}$  assunto da BRADT e PETERS e fondato probabilmente su considerazioni geometriche approssimative.

Difatti, abbiamo, sia a  $30^\circ$  che a  $51^\circ$ ,

$$\frac{N_\alpha(15)}{N_\alpha(48)} = 2,$$

mentre dalle (1), (2) risulta

$$\frac{N_\alpha(15)}{N_\alpha(48)} = \frac{G(15/L_a)}{G(48/L_a)} = \begin{cases} 3,6 & \text{con } L_a = 40 \text{ g cm}^{-2} \\ 2,3 & \text{» } L_a = 70 \text{ »} \\ 2,0 & \text{» } L_a = 90 \text{ »} \end{cases}.$$

Non conoscendo gli errori statistici (e sono gli unici che importano dato che eventuali errori sistematici non dovrebbero influire sul rapporto di misure fatte da uno stesso autore e con uno stesso metodo) non possiamo assegnare un limite inferiore al valore di  $L_a$ . Ma il fatto che il rapporto  $N_\alpha(15)/N_\alpha(48)$  abbia lo stesso valore in due gruppi separati di misure ci permette di attribuire un discreto peso a tale valore; d'altra parte un limite superiore di  $L_a$  per le particelle  $\alpha$  è certamente il cammino di assorbimento per i protoni, e questo è dell'ordine di 100 g cm $^{-2}$  <sup>(8)</sup>.

Ci sembra ragionevole assumere

$$L_a \leq 80 \text{ g/cm}^2,$$

con un errore che probabilmente non supera il 20%.

Naturalmente il cambiamento del valore di  $L_a$  porta con sé una alterazione nei valori delle intensità al limite dell'atmosfera. La formula (5) mostra che le intensità vanno ridotte nel rapporto  $F(x/L_1)/F(x/L_2)$  quando il cammino di assorbimento passa da  $L_1$  a  $L_2$ , e la tabella I mostra il risultato di questo calcolo.

<sup>(8)</sup> B. ROSSI: *Cosmic Rays*, cap. 8, § 15, in corso di pubblicazione.

TABELLA I.

$L_a$ (g cm <sup>-2</sup> )	40	65	80	95
$I_0$ (30°)	$6 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$I_0^{(\min)}$ (51°)	$21 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-3}$
$I_0$ (51°)	$26 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$18,5 \cdot 10^{-3}$	$17,5 \cdot 10^{-3}$

Confrontiamo ora queste intensità con i numeri assoluti di stelle ottenuti nelle diverse esperienze. È comodo usare nel confronto la lunghezza totale di traccia, che chiameremo  $\mathcal{L}$  e che è la somma delle lunghezze delle tracce esistenti in un dato volume  $V$ . È facile vedere che la lunghezza totale di traccia per unità di volume e di tempo coincide con l'intensità integrata. Si ha quindi

$$(6) \quad \mathcal{L} = 2\pi I_0 \cdot V \cdot t \cdot G\left(\frac{x}{L_a}\right),$$

e d'altra parte evidentemente  $\mathcal{L}$  è legato al numero di stelle per cm<sup>3</sup> dalla relazione

$$(7) \quad \mathcal{L} = N_a \cdot V \cdot L_{em} \quad (L_{em} \text{ in cm}).$$

Abbiamo quindi calcolato, a partire dalle intensità  $I_0^{(\min)}$  dedotte sopra, i valori di  $\mathcal{L}$  che si dovrebbero avere nelle esperienze di LORD e del gruppo di Roma, assumendo  $L_a$  uguale a 40 g cm<sup>-2</sup> oppure 80 g cm<sup>-2</sup> (tabella II, righe 4 e 6), e in corrispondenza, per mezzo della (7), i valori di  $L_{em}$  che ne risultano. Si vede subito come il cammino in aria di 40 g cm<sup>-2</sup> conduca a valori di  $L_{em}$  assolutamente incoerenti fra loro, mentre l'accordo, anche per quanto riguarda il dato di Roma, è soddisfacente, entro gli errori, quando si prenda  $L_{ar} = 80$  g cm<sup>-2</sup>. Comunque a meno che non si ammetta di aver perduto i tre quarti delle stelle, il cammino di interazione in emulsione assunto da LORD, e cioè di 10 cm, è in completo disaccordo con quanto noi troviamo.

Anche in questo caso un limite superiore per il cammino di interazione è dato da quello dei protoni, ma anche questo non è noto con molta sicurezza. CAMERINI e altri <sup>(9)</sup>, con una statistica di stelle doppie piuttosto povera, trovano per energie minori di 600 MeV un cammino uguale a quello geometrico, mentre BERNARDINI, con protoni di 350÷400 MeV, trova che esso è circa due volte più lungo. I nostri dati indicherebbero per le particelle  $\alpha$  un cammino di circa 40 cm, ma un cammino all'incirca uguale a quello geometrico dei protoni, ossia di 30 cm, è ancora compatibile con i valori trovati, dati gli errori piuttosto notevoli da cui questi sono affetti.

<sup>(9)</sup> U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).



TABELLA II.

LORD					CORTINI
Latitudine geomagnetica	30°	30°	51°	51°	47°
Profondità (g cm <sup>-2</sup> ) . . . .	15	48	15	48	(59)
<i>N</i> . . . . .	25	12	107	54	22
$I_a = 40 \text{ g cm}^{-2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ . . .} \\ L_{em} \text{ (cm)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1300 \\ 50 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 360 \\ 30 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4600 \\ 45 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1270 \\ 23 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 360 \\ 16 \end{array} \right.$
$I_a = 80 \text{ g cm}^{-2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \text{ . . .} \\ L_{em} \text{ (cm)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1280 \\ 51 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 590 \\ 49 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4800 \\ 45 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2200 \\ 41 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 750 \\ 34 \end{array} \right.$

I valori di  $N_a$  e di  $\mathcal{E}$  relativi all'esperienza di LORD si riferiscono a 1 cm<sup>3</sup> di emulsione e a 1 giorno, mentre quelli relativi all'esperienza di CORTINI sono riferiti al tempo totale di volo e al volume esplorato. La profondità indicata tra parentesi è la profondità equivalente al volo effettivo, calcolata per i cammini di assorbimento che ci interessano.

D'altronde non è improbabile che i numeri delle stelle  $\alpha$  trovati da LORD e da noi siano errati per difetto, dato che il riconoscimento di tracce molto inclinate o molto corte è praticamente impossibile. In realtà, anche per le stelle bisognerebbe imporre una condizione geometrica, e cioè che la traccia dovuta al primario sia più lunga di una certa lunghezza minima. Tale criterio complica molto i calcoli, e potrebbe essere sostituito con quello di raccogliere tutte le stelle contenute in uno strato mediano dell'emulsione ed aventi un primario formante un angolo minore di  $\delta$  con il piano della lastra. In tal caso il calcolo sarebbe identico a quello delle tracce isolate; è ovvio però che su statistiche povere come quelle esistenti finora una tale raffinatezza del calcolo sarebbe del tutto fuori luogo.

Può essere interessante notare che sul cammino libero in emulsione fotografica esiste anche un dato di GARDNER <sup>(4)</sup>, non molto recente. In lastre esposte a particelle  $\alpha$  al ciclotrone, questi trovava per un'energia di 210 MeV una sezione d'urto media  $\sigma = 0,15 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, corrispondente a un cammino libero di ben 95 cm. Tale numero è però dello stesso ordine di grandezza di quello trovato recentemente da GERMAIN <sup>(10)</sup> per i protoni della stessa energia.

<sup>(10)</sup> L. S. GERMAIN: *Phys. Rev.*, **82**, 596 (1951).

### Cammino geometrico in emulsione e in aria.

La conclusione che si trae dal numero precedente, e cioè che i cammini liberi non varierebbero sostanzialmente dai protoni alle particelle  $\alpha$ , porta a screditare qualsiasi ragionamento basato sulle sezioni geometriche. D'altra parte è possibile che nuove esperienze più precise portino a valori più bassi dei cammini delle particelle  $\alpha$ , e in tal caso un confronto con un calcolo geometrico potrebbe essere interessante.

Abbiamo fatto il calcolo con due criteri differenti, e con risultati abbastanza diversi nei due casi.

Un primo modo di calcolare il cammino geometrico è indicato da BLATT e WEISSKOPFF <sup>(11)</sup> ed è quello di assumere per i nuclei bombardati un raggio  $R = r_0 A^{1/3} + \varrho$ ;  $\varrho$  vale 0 per i protoni e  $1,2 \cdot 10^{-13}$  cm per le particelle  $\alpha$ , e questo valore è stato fissato in modo che dia risultati in accordo con le esperienze alle basse energie. Il calcolo corrispondente, quando si tenga conto della composizione dell'emulsione, dà  $L_{em} = 14$  cm. Per l'aria risulta invece  $L_a = 30$  g cm<sup>-2</sup>. È evidente quindi che la formula di Weisskopf non può essere estesa alle energie elevate, a meno di non prendere per  $\varrho$  un valore molto più piccolo.

Il secondo metodo porta a risultati un po' più realistici, e consiste nell'aumentare le sezioni d'urto per i protoni (che al solito sono  $\sigma = \pi r_0^2 A^{2/3}$ ) nel rapporto  $R = ((A^{1/3} + 4^{1/3}) / (A^{1/3} + 1^{1/3}))^2$ . I risultati che si ottengono sono  $L_{em} = 21,5$  cm e  $L_a = 50$  g cm<sup>-2</sup>.

In nessun caso si ottiene il valore  $L_{em} = 10$  cm calcolato da LORD, a meno che non si assuma, quale rapporto fra i cammini liberi dei protoni e delle  $\alpha$  il valore che risulta puramente dal confronto delle sezioni geometriche delle particelle stesse.

### Conclusione.

Possiamo riassumere le conclusioni raggiunte dando i seguenti valori per cammini liberi delle particelle  $\alpha$  e per le intensità al limite dell'atmosfera:

Cammino libero di assorbimento in aria  $\sim 80$  g cm<sup>-2</sup>;

Cammino libero di interazione in emulsione  $\sim 120$  g cm<sup>-2</sup> = 30 cm;

Intensità verticale a 30° =  $(4 \pm 1,5) \cdot 10^{-3}$  cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> sterad<sup>-1</sup>;

Intensità verticale a 51° =  $(18 \pm 6) \cdot 10^{-3}$  cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> sterad<sup>-1</sup>.

<sup>(11)</sup> J. M. BLATT e V. F. WEISSKOPFF: *The Theory of Nuclear Reaction*. O.N.R. Technical Report N. 42, pag. 46.

Circa l'attendibilità di questi dati, valga quanto abbiamo detto all'inizio e più volte ripetuto in seguito.

Desidero ringraziare vivamente il sig. WOLF GROSS per l'aiuto datomi nel calcolo matematico. Al prof. G. CORTINI, che mi ha suggerito l'argomento della presente nota ed ha contribuito con consigli e discussioni al suo svolgimento, va la mia profonda gratitudine.

Esprimo inoltre la mia riconoscenza al prof. E. AMALDI per avermi dato la possibilità di lavorare in questo laboratorio.

---

#### SUMMARY

A serious disagreement exists among the results of the different Authors who studied  $\alpha$ -particles in the primary Cosmic Radiation. From an analysis of experimental data we think we should modify the values of the mean free path in air and in emulsion, to obtain a more satisfactory agreement. In other words we think we ought to change the absorption mean free path in air from 40 to  $\sim 80$  g cm $^{-2}$  and the collision mean free path in photographic emulsion from 39 to  $\sim 120$  g cm $^{-2}$ . These values do not substantially differ from the ones assumed for protons. We also give corrected values for the vertical intensity of the  $\alpha$ -particles at the top of the atmosphere, at 30° and 51° geom. lat.:  $I_0(30^\circ) = (4 \pm 1.5) \cdot 10^{-3}$  cm $^{-2}$  s $^{-1}$  sterad $^{-1}$ ,  $I_0(51^\circ) = (18 \pm 6) \cdot 10^{-3}$  cm $^{-2}$  s $^{-1}$  sterad $^{-1}$ . Besides we relate in detail the mathematical calculations and give the graphs of two curves the use of which makes much easier handling both our problem and all similar problems, particularly those concerning heavy particles.

## Note on the Superposition Method in Mass Spectrometry.

G. CARERI

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma*

(ricevuto il 30 Novembre 1951)

**Summary.** — The molecular flow in a mass spectrometer is shown to be not the only condition to be fulfilled in order that the superposition method can be applied. The ionization, scattering and neutralization processes must also be considered, and simple rules to get the right number of leaks, with the restraint of superposition, are worked out.

A well known condition to satisfy for ideal operation in mass spectrometry for abundance analyses is the linear superposition of all individual intensities on the collector cage. Then a change in the amount of one substance must not affect the peak heights of the others. This condition is usually assumed <sup>(1)</sup> to be satisfied when the gas flow through the mass spectrometer vacuum line is a molecular one, as in this type of flow every molecule behaves independently from the others.

To get the molecular flow <sup>(2)</sup> the experimentalist makes usually the pressure in the sample reservoir low enough for the mean free path to be twenty or thirty times the leak's diameter. In order to increase the ion beam intensity, it is usual to put a number of the same size leaks in parallel in the gas inlet system <sup>(3)</sup>. The practical question arises, to inquire how far it is possible now to increase this number  $n$  of leaks, the gas flow throughout the line still remaining the molecular one.

---

<sup>(1)</sup> For an excellent review on this subject, see M. G. INGRAM: *Advances in Electronics*, **1**, 219 (1948).

<sup>(2)</sup> R. E. HONIG: *Journ. Appl. Phys.*, **16**, 646 (1945).

<sup>(3)</sup> For instance a glass diaphragm leak has been described by V. H. DIBLER and T. I. TAYLOR: *Science*, **108**, 686 (1948).



1. — In this section we will establish the pressures in some important section of the gas flow system, as a function of the geometry of the vacuum line and the gas inlet system. A typical gas flow arrangement used in mass spectrometry is shown in fig. 1. The gas to be analysed is placed in the reservoir and allowed to leak through the line to the pump.

Looking at fig. 1, let us write the equilibrium conditions for the gas flow in three sections of the vacuum line. Assuming the reservoir volume large enough for the pressure  $P_0$  of one component in it not to vary, and moreover  $P_0 \ll P_1$ , one has

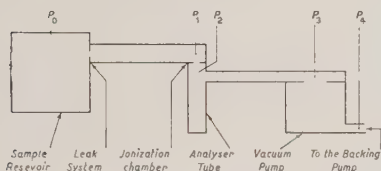


Fig. 1. — Schematic gas flow arrangement used in mass spectrometry.

$$(1) \quad nK_{01}P_0 - K_{12}(P_1 - P_2) = 0,$$

$$(2) \quad K_{12}(P_1 - P_2) - K_{23}(P_2 - P_3) = 0,$$

$$(3) \quad K_{23}(P_2 - P_3) - K_{34}P_3\eta = 0.$$

Measuring the gas flow in pressure · volume time units, then  $K_{xy}$  is the conducibility factor of the pipe or leak connecting the two sections  $x$  and  $y$ . Expressions for  $K_{xy}$  have been obtained in a number of cases by KNUDSEN and SMOLUCHOWSKI, and will be reported later.

Equations (1) and (2) are self evident, but equation (3) needs to be justified. The gas flow through the pump has been expressed as the product of the pumping speed times the pressure there and times a factor  $\eta$  representing the pump yield. In this way we assumed the pump speed to be independent from the pressure, as it has been realized in the past few years. As a matter of fact SEARS <sup>(4)</sup> and BERRY <sup>(5)</sup> showed the measured pump speed to vanish at an extremely low pressure because at such a low pressure the adsorbed gases on the walls and the gases evolved by the pump itself due to the boiling, have a value so large to be the only volume the pump can take away. The pumping speed  $K_{34}$  is instead a geometrically well defined quantity, independent from the pressure in the pressure range where the pump works. Then it must be pointed out, that the  $P$  of the above equations represent the partial pressure of a component in the flowing gas mixture, without taking into account the background of the same component in the mass spectrometer.

With the factor  $\eta$ , the pump yield, we want to take into account the back diffusion of the gas through the vapor jet of the pump. This factor is strongly dependent on the molecular weight, the type of the jet and other parameters of the pump; its importance in mass spectrometry will not be discussed here.

(4) G. W. SEARS: *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 458 (1949).

(5) C. E. BERRY: *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 835 (1949).

From the above equations we can get the pressure we were interested in, namely

$$(4) \quad P_1 = \frac{P_0 n K_{01}}{K_{12}} \left\{ 1 + \frac{K_{12}(K_{23} + \eta K_{34})}{\eta K_{23} K_{34}} \right\},$$

$$(5) \quad P_2 = \frac{P_0 n K_{01}}{\eta K_{23} K_{34}} (K_{23} + \eta K_{34}),$$

$$(6) \quad P_3 = \frac{P_0 n K_{01}}{\eta K_{34}}.$$

If  $P_0 \gg P_1 \gg P_2 \gg P_3$ , then we simply have

$$(7) \quad P_1 = \frac{P_0 n K_{01}}{K_{12}},$$

$$(8) \quad P_2 = \frac{P_0 n K_{01}}{K_{23}},$$

$$(9) \quad P_3 = \frac{P_0 n K_{01}}{\eta K_{34}}.$$

These last equations will be used later.

2. — We now want to estimate the maximum number  $n$  of leaks in parallel one can use with the restraint of molecular flow through all the vacuum line.

Kundsen's experiments showed the molecular flow to be surely established when the mean molecular free path is nearly thirty times the pipe's or leak's diameter. The critical dimensions of mass spectrometers for abundance analysis are now rather standardized, and we can reasonably assume an average size of 30  $\mu$  for the leak diameter, 1.01 cm<sup>2</sup> for the exit ion slit in the ion source, 4 cm for the exhausting pipe and 10 cm for the pump diameters. Then using the familiar relationship <sup>(6)</sup> between pressure and mean free path one is able to calculate the maximum pressure allowed in the above corresponding places. Equations (7), (8) and (9) give then three conditions to be fulfilled by the number of leaks as a function of the geometry of the vacuum

<sup>(6)</sup> If the pressure is measured in mm Hg, the mean free path in Å, the molecular diameter  $d$  in Å, the temperature  $T$  in °K, the relationship can be written  $P = 0.1 \cdot T/300\lambda d$ . For details see J. E. MAYER and M. G. MAYER: *Statistical Mechanics* (New York, 1939).

<sup>(7)</sup> See reference <sup>(1)</sup>.

system, namely

$$(10) \quad n \leq \frac{K_{12}}{K_{10}} 6 \cdot 10^{-3},$$

$$(11) \quad n \leq \frac{K_{12}}{K_{01}} 12 \cdot 10^{-3},$$

$$(12) \quad n \leq \frac{K_{34}}{K_{01}} 30 \cdot 10^{-3}.$$

A factor of two occurs in equation (10) since the temperature in the ion source is twice the room temperature in Kelvin degrees. We notice the last three conditions to be independent of the nature of the flowing gas, since only the ratio of the  $K_{xy}$ 's appears. It is easy to be convinced that the same conditions also hold for a mixture of  $N$  components, provided

$$(12) \quad \sum_{i=1}^N d_i P_{0_i} \leq 0.1 T/300 \lambda_0,$$

$\lambda_0$  being the mean free path in the gas reservoir.

A numerical example is very clarifying at this point. Let us evaluate  $K_{01}$  and  $K_{12}$  by the Knudsen expression

$$(13) \quad K_{xy} = 2860 D_{xy}^2 (T/M)^{1/2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

where  $D_{xy}$  is the leak diameter in cm,  $M$  the molecular weight and  $T$  the temperature. We then have  $K_{01} = 2.6 \cdot 10^{-2} (T/M)^{1/2}$  and  $K_{12} = 90 (T/M)^{1/2}$  assuming  $\pi D_{12}^2$  equal to  $0.1 \text{ cm}^2$ , the slit area. To get  $K_{23}$  we use the expression

$$(14) \quad K_{xy} = 3800 (D_{xy}^3/L)(T/M)^{1/2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

and with a pipe diameter  $D_{23} = 4 \text{ cm}$  and length  $L_{23} = 30 \text{ cm}$ , we have  $K_{23} = 8.1 \cdot 10^3 (T/M)^{1/2}$ . The conditions (10), (11), (12) to be satisfied by the leaks number  $n$ , under the only restraint of molecular flow, through all the line, then become

$$(15) \quad n \leq 29,$$

$$(16) \quad n \leq 3700,$$

$$(17) \quad n \leq 1150 \eta s,$$

$s(T/M)^{1/2}$  being the pump speed in l/s.

3. — The above calculated maximum number of leaks, which one can put in parallel so as to have molecular flow through the whole vacuum line, is far bigger then that used in practice. Obviously if one uses such a large number

of leaks, the ion scattering and neutralization would be quite remarkable and, as we will show now, the superposition method would be no longer applicable.

The scattering and neutralization cross section of ions in a rarefied gas has been measured by many authors (\*), and found to be a function sharply dependent on the velocity and nature of both ions and neutral molecules. Due to scattering and neutralization processes a small number of ions in a mass spectrometer will not reach the collector cage, and this number will be a function of the total number and of the nature of the colliding molecules, namely of the pressure and of the composition of the sample to be analyzed. Strictly speaking then the superposition method is never applicable, even working with molecular flow.

In practice however, it is sufficient to evaluate this small ratio of «dead» ions, and to be sure to keep this ratio of the same order of magnitude as the allowed error of the measurements. Let us suppose for instance this error to be 1/1000 and let us evaluate the allowed number of leaks. We need first find out the pressures in the ionization chamber and in the analyser tube which are so low that the scattering and neutralization processes give a ratio of «dead» ions to the total number of ions of about 1/1000, and then use these pressures in equations (7), (8), (9), to get the right number of leaks. In the ionization chamber the ions energy is less than fifty electron volts, and in this range the cross sections for all the above processes are high and show also some resonances. We can reasonably assume for neutralization and scattering cross section a radius of 3 Å. Since the ions path inside the ionization chamber is about 0.5 cm, the pressure  $P_1$  must not be more than  $2 \cdot 10^{-5}$  mm Hg to keep the impact probability about 1/1000, as one can easily calculate (\*). In the analyzer tube the beam is accelerated at a few thousands eV, then the cross section is about the gas kinetic one. To have the same impact probability during the path of 50 cm, the pressure  $P_2$  in the analyzer must be around  $10^{-6}$  mm Hg. If we use the last two calculated values of  $P_1$  and  $P_2$  in equations (7) and (8) together with  $P_0 = 10^{-1}$  mm Hg as required by molecular flow, we then get a value for  $n$  nearly equal to one.

We should apply the same kind of argument also to the ionization process to be sure that the ionization probability of a molecule inside the ionization chamber is independent from the composition of the sample to be analyzed. However, since the ionization cross section is about 1/4 of the scattering and neutralization cross sections, we understand the ratio of colliding electrons to the total electrons of the beam will be less than 1/1000, in the electron paths inside the ionization chamber at the above evaluated pressure  $P_1$ .

---

(\*) For a review on this subject see K. F. HERZFELD: *Jahrb. d. Chem. Phys.*, **3**, IV, 133 (1939).

(\*) For instance see J. E. MAYER and G. M. MAYER: loc. cit., pag. 18.



The case we treated above is the extreme one: it shows that working with only one leak, in an ordinary mass spectrometer the superposition method can be applied without making a mistake larger than a few units per thousand. In practice it will not be difficult following the above arguments to find out the right number of leaks, when the geometry of the instrument, the molecular diameter of the gas flowing and the error allowed in the measurements are given. The case when only isotopes abundances are concerned is often of interest: we notice that in this case the ionization, the scattering and the neutralization cross sections are the same for the different isotopes, then one can calculate the number of leaks with the conditions (10), (11) and (12) increasing very much the number of leaks which is usually supposed to be the right one.

---

#### RIASSUNTO

Viene mostrato come la condizione che il flusso di gas sia molecolare attraverso il circuito da vuoto di uno spettrometro di massa, non sia sufficiente per assicurare l'applicabilità del metodo di sovrapposizione. Considerando anche i processi di ionizzazione, scattering e neutralizzazione, viene mostrato come si possa determinare il numero di fori in parallelo che si può usare rimanendo nel campo di validità di detto metodo.

## Questioni statistiche sulla distribuzione angolare dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica.

G. LOVERA

*Istituto di Fisica dell'Università - Modena*

(ricevuto il 12 Dicembre 1951)

**Riassunto.** — Deviazioni dall'isotropia nella distribuzione angolare intrinseca dei rami di stelle prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche possono essere interpretate ricorrendo alla statistica degli eventi correlati.

1. — In una breve nota precedente <sup>(1)</sup>, è stato formulato un criterio per indagare se la distribuzione dei rami nelle stelle di disintegrazione, osservate in lastre fotografiche e dovute alla radiazione cosmica, sia o no statisticamente isotropa. Tale criterio concerne l'isotropia nella distribuzione delle proiezioni ortogonali dei rami sul piano dell'emulsione. La sua applicazione alle stelle di particelle  $\alpha$  dovute a disintegrazioni successive di atomi radioattivi contenuti nell'emulsione delle lastre in questione, ha permesso di stabilire che in questo caso il criterio di isotropia è soddisfatto.

Invece, per le stelle di disintegrazione dovute alla radiazione cosmica si è constatata, come si dirà più innanzi, una discordanza sistematica tra le probabilità teoriche e le frequenze sperimentali, particolarmente accentuata soprattutto per le stelle a piccolo numero di rami: queste perciò non soddisfano al criterio di isotropia in questione.

Poichè le frequenze teoriche si riferiscono ad una distribuzione di eventi casuali, indipendenti, può essere interessante ricercare una interpretazione statistica delle frequenze sperimentali, per le stelle dovute alla radiazione cosmica, prendendo in considerazione il caso di cosiddetti «eventi correlati» <sup>(2)</sup>, per i quali cioè la probabilità che ha un evento di verificarsi dipende dalla distribuzione di altri eventi verificatisi.

<sup>(1)</sup> G. LOVERA: *Nuovo Cimento*, **6**, 233 (1949).

<sup>(2)</sup> C. DOMB: *Phil. Mag.*, **41**, 969 (1950).

2. — Prescindendo per il momento, a scopo di maggiore generalità, dal particolare problema che ha dato lo spunto alla ricerca, si consideri una successione di eventi correlati, riferiti ad una variabile (che potrà essere, a seconda dei casi, temporale, spaziale, in particolare angolare). Si dia il caso più semplice di eventi correlati, cioè che la probabilità, che ha un evento di verificarsi, dipenda solo dall'intervallo  $\zeta$  che lo separa dall'evento immediatamente precedente della successione. Sia  $\varphi(\zeta)$  la probabilità che nessun evento si verifichi in un intervallo dopo un dato evento, e sia  $f(\zeta)\nu d\zeta$  la probabilità che, in questa ipotesi, un evento abbia luogo nell'intervallo  $(\zeta \div \zeta + d\zeta)$ : si ha allora

$$(1) \quad -d\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta) \cdot f(\zeta)\nu d\zeta,$$

da cui

$$(2) \quad \varphi(\zeta) = \exp \left[ - \int_0^{\zeta} f(z)\nu dz \right].$$

La probabilità che l'intervallo tra due eventi successivi sia compreso tra  $\zeta$  e  $\zeta + d\zeta$  è perciò

$$(3) \quad f(\zeta) \exp \left[ - \int_0^{\zeta} f(z)\nu dz \right] \cdot \nu d\zeta = g(\zeta) d\zeta.$$

Si assuma in particolare per  $g(\zeta)$  la seguente espressione:

$$(4) \quad g(\zeta) = \frac{\nu(\nu\zeta)^{r-1}}{\Gamma(r)} \exp [-\nu\zeta],$$

che corrisponde a

$$(5) \quad f(\zeta) = \frac{\zeta^{r-1} \exp [-\nu\zeta]}{\int_{\zeta}^{\infty} z^{r-1} \exp [-\nu z] \nu dz}$$

Si vede immediatamente che per  $r = 1$  è  $f(\zeta) = 1$ ,  $g(\zeta) = \nu \exp [-\nu\zeta]$ : si ha il caso della statistica di Poisson, di eventi casuali, non correlati. Invece per  $0 < r < 1$ ,  $f(\zeta)$  è decrescente al crescere di  $\zeta$ ; mentre per  $r > 1$ ,  $f(\zeta)$  è crescente al crescere di  $\zeta$ : nella prima eventualità, piccoli intervalli  $\zeta$  sono più probabili che nella statistica di Poisson, e nella seconda eventualità sono meno probabili.

W. FELLER <sup>(3)</sup> ha calcolato, per il caso di eventi casuali, retti dalla statistica di Poisson, la probabilità  $P(l; m, D)$  che in un intervallo di estensione  $D$  in cui cade un numero prefissato  $m$  di eventi, uno qualsiasi degli  $m + 1$  inter-

(3) W. FELLER: *Phys. Rev.*, **57**, 90 (1940).

valli parziali in cui  $D$  ne è diviso abbia lunghezza non inferiore ad un dato valore  $l$  ( $0 < l < D$ ), ed ha trovato

$$(6) \quad P(l; m, D) = \left(1 - \frac{l}{D}\right)^m.$$

Su questa formula è basato il criterio di isotropia che è oggetto della sopracitata nota <sup>(1)</sup>.

Ci proponiamo ora di estendere i calcoli di FELLER ad una distribuzione statistica retta dalle (4) e (5).

Sia  $D$  un intervallo contenente esattamente  $m$  eventi  $E_1, E_2, \dots, E_m$ , più due eventi agli estremi dell'intervallo (non computati negli  $m$ ). Indichiamo con  $u(k-1, t) dt$  la probabilità che nell'intervallo  $t$  (a partire dall'evento iniziale, non computato), cadano  $k-1$  eventi, ed il  $k$ -esimo tra  $t$  e  $t + dt$ .

Allora, la probabilità  $P(l; m, D)$  che l'intervallo tra due eventi consecutivi qualsiasi  $E_k, E_{k+1}$  (che si verificano in  $t \div t + dt$  e  $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta$ ) superi  $l$ , essendo  $0 < l < D$ , risulta:

$$(7) \quad P(l; m, D) = \frac{\int_0^{D-l} u(k-1, t) dt \int_{t+l}^D g(\vartheta - t) u(m-k-1, D-\vartheta) d\vartheta}{u(m, D)}.$$

Per esempio, per  $m=2$ ,  $k=1$ ,  $D=1$ , e specificando l'espressione di  $g(\zeta)$  secondo la (4), si trova

$$(8) \quad P^{(r)}(l; 2, 1) = \frac{\int_0^{1-l} t^{r-1} dt \int_{t+l}^1 (\vartheta - t)^{r-1} (1 - \vartheta)^{r-1} d\vartheta}{\int_0^1 t^{r-1} dt \int_t^1 (\vartheta - t)^{r-1} (1 - \vartheta)^{r-1} d\vartheta},$$

dove l'indice <sup>(r)</sup> di  $P$  contrassegna il valore di  $r$  scelto nella (4). Così, con semplici integrazioni, si ottiene:

$$(9') \quad r = 0,5 \quad P^{(0,5)}(l; 2, 1) = 1 - \sqrt{l};$$

$$(9'') \quad r = 1 \quad P^{(1)}(l; 2, 1) = (1-l)^2;$$

$$(9''') \quad r = 1,5 \quad P^{(1,5)}(l; 2, 1) = 1 - \sqrt{l} \left( \frac{15}{8} l^3 - \frac{21}{4} l^2 + \frac{35}{8} l \right);$$

$$(9''') \quad r = 2 \quad P^{(2)}(l; 2, 1) = 5(1-l)^4 - 4(1-l)^5.$$

Analogamente, per  $m=3$ , nelle stesse ipotesi, si trova:

$$(10') \quad r = 0,5 \quad P^{(0,5)}(l; 3, 1) = \frac{2}{\pi} \left[ \arctg \left( \frac{1-l}{l} \right)^{1/2} - (1-l)^{1/2} l^{1/2} \right];$$

$$(10'') \quad r = 1 \quad P^{(1)}(l; 3, 1) = (1-l)^3;$$

$$(10''') \quad r = 1,5 \quad P^{(1,5)}(l; 3, 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{1-l}{l} \right)^{1/2} + \frac{2}{\pi} (1-l)^{1/2} l^{1/2} - \\ - \frac{2}{\pi} (1-l)^{1/2} l^{3/2} \left[ \frac{128}{35} (1-l)^3 + \frac{16}{5} (1-l)^2 + \frac{8}{3} (1-l) + 2 \right].$$

$$(10''') \quad r = 2 \quad P^{(2)}(l; 3, 1) = 7(1-l)^6 - 6(1-l)^7.$$

Se poi  $D \neq 1$ , basta sostituire  $l/D$  in luogo di  $l$  nelle (9) e (10). Come c'è da attendersi, per  $r = 1$  si ritrova appunto la (6).

La probabilità che l'intervallo tra due eventi sia compreso tra  $l_1$  e  $l_2$  ( $> l_1$ ) è quindi

$$(11) \quad P^{(r)}(l_1, l_2) = P^{(r)}(l_1; m, D) - P^{(r)}(l_2; m, D).$$

3. - Venendo ora alla proiezione di una stella a  $n$  rami, supponiamo che per gli  $n$  angoli tra rami successivi in cui l'angolo giro resta diviso, valga una distribuzione statistica del tipo di quelle sopra considerate, caratterizzata da un certo valore di  $r$ . Posto allora  $n = m + 1$ ,  $D = 1$ ,  $l = \varphi/2\pi$  oppure  $l = \varphi/360$ , a seconda che l'angolo tra due rami successivi è misurato in radianti oppure in gradi sessagesimali, la probabilità che  $\varphi$  sia compreso fra  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  radianti, o fra  $\varphi_1^\circ$  e  $\varphi_2^\circ$  gradi sessagesimali, risulta:

$$(12') \quad p_n^{(r)}(\varphi_1, \varphi_2) = P^{(r)}\left(\frac{\varphi_1}{2\pi}; n-1, 1\right) - P^{(r)}\left(\frac{\varphi_2}{2\pi}; n-1, 1\right)$$

$$(12'') \quad p_n^{(r)}(\varphi_1^\circ, \varphi_2^\circ) = P^{(r)}\left(\frac{\varphi_1^\circ}{360^\circ}; n-1, 1\right) - P^{(r)}\left(\frac{\varphi_2^\circ}{360^\circ}; n-1, 1\right).$$

Per  $n = 3$  si è calcolata, con le (9')-(9''), la tabella I, e per  $n = 4$  con le (10')-(10''), la tabella II.

TABELLA I. - Valori di  $p_3^{(r)}(\varphi_1^\circ; \varphi_2^\circ)$ .

$\varphi_1^\circ \div \varphi_2^\circ$	$p_3^{(r)}(\varphi_1^\circ; \varphi_2^\circ)$			
	$r = 0,5$	$r = 1,0$	$r = 1,5$	$r = 2,0$
$0 \div 36^\circ$	0,316	0,190	0,122	0,081
$36 \div 72$	0,131	0,170	0,182	0,182
$72 \div 108$	0,101	0,150	0,184	0,209
$108 \div 144$	0,084	0,130	0,163	0,191
$144 \div 180$	0,075	0,110	0,133	0,150
$180 \div 216$	0,068	0,090	0,099	0,100
$216 \div 252$	0,062	0,070	0,065	0,057
$252 \div 288$	0,058	0,050	0,036	0,023
$288 \div 324$	0,054	0,030	0,014	0,006 <sub>5</sub>
$324 \div 360$	0,051	0,010	0,002	0,000 <sub>5</sub>



TABELLA II. — Valori di  $p_4^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$ .

$\varphi_1^0 \div \varphi_2^0$	$p_4^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$			
	$r = 0,5$	$r = 1,0$	$r = 1,5$	$r = 2,0$
$0 \div 36^\circ$	0,396	0,271	0,198	0,150
$36 \div 72$	0,154	0,217	0,252	0,273
$72 \div 108$	0,111	0,169	0,212	0,247
$108 \div 144$	0,087	0,127	0,153	0,171
$144 \div 180$	0,070	0,091	0,097	0,097
$180 \div 216$	0,058	0,061	0,053	0,043
$216 \div 252$	0,047	0,037	0,025	0,015
$252 \div 288$	0,036 <sub>5</sub>	0,019	0,008	0,003 <sub>5</sub>
$288 \div 324$	0,026 <sub>5</sub>	0,007	0,002	0,000 <sub>5</sub>
$324 \div 360$	0,014	0,001	0,000	0,000

In accordo con quanto si è detto a proposito della (5), per  $r < 1$  gli intervalli angolari minori sono più frequenti che nella statistica di Poisson ( $r = 1$ ), (e di conseguenza anche gli intervalli maggiori hanno una frequenza più alta, essendo fissata l'ampiezza dell'intervallo totale, diviso in  $n$  intervalli parziali); per  $r > 1$ , sono invece preferiti gli intervalli di estensione intermedia.

4. — Per oltre un migliaio di stelle di disintegrazione (senza rami relativistici), prodotte dalla radiazione cosmica, ed osservate in un gruppo di lastre Ilford G5 (spessore 200  $\mu$ ) esposte per alcune settimane a 3500 m (Plateau Rosà), sono stati misurati gli angoli  $\varphi$  tra le proiezioni successive dei rami sul piano dell'emulsione (\*). A titolo di esempio, nella tabella III sono riportate: le frequenze sperimentali per le stelle a  $n = 3$  rami (senza recoil visibile) determinate su 232 stelle (696 angoli), confrontate con le probabilità teoriche per  $r = 1,50$ ; e le frequenze per le stelle a  $n = 4$  rami (pure senza recoil visibile) determinate su 204 stelle (816 angoli), confrontate con le probabilità

(\*) La distribuzione angolare nelle stelle è già stata trattata in parecchi lavori: G. STETTER e H. WAMBACHER: *Phys. Zeits.*, **40**, 702 (1939); H. WAMBACHER: *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien*, **149 a**, 157 (1940); D. H. PERKINS: *Nature*, **161**, 486 (1948); E. GARDNER e V. PETERSON: *Phys. Rev.*, **75**, 364 (1949); J. B. HARDING: *Phil. Mag.*, **40**, 530 (1949); R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949); U. CAMERINI, T. COOR, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, W. O. LOCK, H. MUIRHEAD e N. TOBIN: *Phil. Mag.*, **40**, 1073 (1949); M. D. COSYNS: *Suppl. Nuovo Cimento*, **6**, 397 (1949); A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 195 (1951); M. DELLA CORTE e M. GIOVANNONZI: *Nuovo Cimento*, **8**, 741 (1951). Per altro, va notato che criteri statistici differenti non sono riconducibili a quello qui adottato, qualora nella elaborazione statistica sia stata cancellata la nozione di successione ordinata di elementi (raggi) nella proiezione della stella.

teoriche per  $r = 1,25$  (queste ultime sono state dedotte per interpolazione dai dati della tabella II).

TABELLA III. — *Frequenze sperimentali e probabilità teoriche.*

$\varphi_1^0 \div \varphi_2^0$	$n = 3$		$n = 4$	
	freq. sper.	$p_3^{(1,5)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$	freq. sper.	$p_4^{(1,25)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$
$0 \div 36^\circ$	0,135	0,122	0,229	0,231
$36 \div 72$	0,165	0,182	0,245	0,237
$72 \div 108$	0,170	0,184	0,184	0,191
$108 \div 144$	0,171	0,163	0,128	0,141
$144 \div 180$	0,161	0,133	0,103	0,095
$180 \div 216$	0,093	0,099	0,064	0,058
$216 \div 252$	0,059	0,065	0,028	0,030
$252 \div 288$	0,025	0,036	0,017	0,013
$288 \div 324$	0,014	0,014	0,002	0,003 <sub>5</sub>
$324 \div 360$	0,007	0,002	0,000	0,000 <sub>5</sub>

Da un confronto con le tabelle I e II appare che le frequenze sperimentali si scostano nettamente, nei casi ora considerati, dalla statistica di Poisson, e si lasciano invece inquadrare soddisfacentemente nella statistica degli eventi correlati, per un opportuno valore di  $r > 1$  (che è più elevato per  $n=3$ : lo scostamento dalla distribuzione casuale si attenua passando da  $n=3$  a  $n=4$ ). Ciò significa che sono preferiti (almeno per le stelle a rami non relativistici) angoli di valori intermedi, a scapito di quelli minori, più frequenti nella statistica di Poisson.

In altri termini, gli angoli tra le proiezioni successive dei rami seguono una distribuzione statistica nella quale il valore più probabile si scosta dal valore medio meno di quanto non accada per la distribuzione casuale. Questo comportamento (che è evidentemente in relazione con le esigenze del bilancio della quantità di moto totale in ogni singola stella), è in accordo, almeno per le stelle a 3 rami, con i risultati di M. DELLA CORTE e M. GIOVANNOZZI (4). Questi Autori trovano infatti, per le stelle senza recoil e senza rami relativistici, un eccesso di angoli di apertura totale grandi (rispetto a quanto atteso per la distribuzione isotropa), ed anche, come risulta dalla fig. 2d) del loro lavoro, una lieve preferenza per i valori bassi del modulo del vettore risultante (almeno per le stelle con rami tutti fortemente ionizzanti).

In un lavoro successivo saranno esposti e discussi in modo più particolareggiato i risultati sperimentali anche per le stelle a maggior numero di rami, ed inoltre sarà eventualmente presa in considerazione la possibilità di estrapolazione alle stelle con due rami.

Ringrazio i professori DEAGLIO e WATAGHIN per i mezzi messi a mia disposizione, per la presente ricerca, nell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino. Ringrazio pure i dottori FERRATO e MUSSO per l'aiuto prestato nelle misure.

#### SUMMARY

Some deviations from isotropy in the intrinsic angular distribution of prongs, in cosmic ray stars which had been produced in nuclear plates, can be accounted for, by means of the statistics of correlated events.

# Étude des minéraux de terres rares par absorption neutronique.

I. H. FORD

*Department of Geology, University of Bristol*

E. E. PICCIOTTO

*Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre de Bruxelles*

(ricevuto il 13 Dicembre 1951)

**Résumé.** — On examine la possibilité de localiser les minéraux de terres rares en lame mince par absorption des neutrons thermiques et de mesurer la concentration en Sm + Gd. Des plaques photographiques nucléaires chargées au bore sont utilisées comme détecteur.

Certains éléments des terres rares présentent des propriétés nucléaires très caractéristiques qui peuvent servir à les détecter ou les doser.

Nous avons essayé de déterminer les minéraux de terres rares par absorption des neutrons thermiques. Notre attention s'est portée sur la localisation microscopique en lame mince grâce à l'emploi d'émulsions photographiques chargées au Bore comme détecteur de neutrons <sup>(1)</sup>.

Les sections efficaces de capture des neutrons thermiques diffèrent très fortement pour les divers éléments des terres rares, Sm et Gd détiennent les valeurs les plus élevées connues.

$\sigma <$	10 barns	La, Ce, Pr (ainsi que Y et Th souvent associés)
$10 < \sigma <$	200 »	Nd, Tb, Ho, Er, Tm, Yb, Lu.
$\sigma \sim$	1150 »	Dy
$\sigma \sim$	4200 »	Eu
$\sigma \sim$	10 000 »	Sm
$\sigma \sim$	40 000 »	Gd.

<sup>(1)</sup> C. HAENNY et O. KLEMENT: *Experientia*, 5/7, 281 (1941); O. PETER: *Zeits. Naturf.*, 1, 557 (1941).

Soit un faisceau de neutrons traversant une section de minéral d'épaisseur  $x$ , la fraction transmise est donnée par la relation bien connue:

$$I/I_0 = \exp [-\Sigma x],$$

où  $\Sigma$  est la section efficace macroscopique de capture.

Pour les minéraux de terres rares,  $\Sigma$  dépend essentiellement de la teneur en Sm + Gd. L'Eu est trop rare <sup>(2)</sup> pour intervenir dans l'absorption et les autres éléments présents sont relativement transparents aux neutrons thermiques.

Nous avons calculé  $\Sigma$  et  $I/I_0$  pour des minéraux contenant respectivement 70%, 15% et 5,3% de terres rares en proportion répondant au type allanite-monazite de RANKAMA et SAHAMA <sup>(3)</sup>.

Les résultats sont donnés dans le tableau I,  $I/I_0$  a été calculé pour 4 épaisseurs de l'échantillon.

TABLEAU I.

% en terres rares	1. (70%)	2. (15%)	3. (5,3%)
$\Sigma$	25 cm <sup>-1</sup>	5,4 cm <sup>-1</sup>	1,9 cm <sup>-1</sup>
Épaisseur $x$	$I/I_0$	$I/I_0$	$I/I_0$
10 <sup>-1</sup> cm	0.082	0.58	0.83
0.5 · 10 <sup>-2</sup> cm	0.28	0.76	0.91
5.0 · 10 <sup>-3</sup> cm	0.88	0.97	0.99
3.0 · 10 <sup>-3</sup> cm	0.93	0.99	1.00
(lame mince standard)			

Le premier cas (70%) correspond aux monazites, une monazite granitique analysée par SAHAMA et VÄHÄTALO <sup>(4)</sup> nous a donné pour  $\Sigma$  la même valeur de 25 cm<sup>-1</sup>.

Le tableau I montre que pour détecter en lame mince (30 à 40  $\mu$ ) des monazites ou des minéraux aussi riches en Sm et Gd, on doit être capable de mesurer une absorption neutronique de l'ordre de 10%, ce qui semble être à la limite des possibilités de la technique suggérée ici.

Les minéraux plus pauvres en terres rares ne seront pas décelables en lame mince, mais seulement en sections de quelques dixièmes de mm.

<sup>(2)</sup> V. M. GOLDSCHMIDT et L. THOMASSEN: *Vid. Skrifter I, Mat. Naturv. Klasse*, n. 5 (1924).

<sup>(3)</sup> K. RANKAMA et T. SAHAMA: *Geochemistry* (Chicago, 1949), p. 520.

<sup>(4)</sup> T. SAHAMA et V. VÄHÄTALO: *Compt. Rend. de la Soc. Geol. de Finlande*, **14**, 50 (1939).



L'influence de la concentration en  $\text{Sm} + \text{Gd}$  sur  $I/I_0$  est montrée par le graphique 1. Les courbes pour 3 épaisseurs de l'échantillon ont été calculées en faisant varier la concentration en  $\text{Sm} + \text{Gd}$  dans le minéral théorique contenant 70% de terres rares dans les mêmes proportions que le type allanite-monazite. Pour simplifier, nous avons admis  $\text{Sm}/\text{Gd} = 1$ .

On voit que sur des sections de l'ordre du mm,  $I/I_0$  est une mesure sensible de la concentration en  $(\text{Sm} + \text{Gd})$ , quand cette dernière est comprise entre 1 et 15%.

Un premier essai expérimental a été conduit comme suit:

Deux sections de monazite et de bastnaesite de  $4 \text{ mm}^2$  et de 1 mm d'épaisseur environ ont été appliquées sur une plaque Ilford C2 de  $100 \mu$  chargée par nous

au Bore par imprégnation dans un bain d'acide borique et de borax à pH 7.

Les neutrons thermiques nous ont été fournis par une source de Ra-Be de 1 curie entourée d'un mètre d'eau.

Plaques et échantillons contenus dans un récipient étanche, ont été placés à 15 cm de la source, le côté émulsion vers la source.

L'émulsion était protégée du rayonnement  $\gamma$  par un écran de Pb de 10 cm entourant la source, et des neutrons thermiques venant de l'arrière par une feuille de Cd de 0,5 mm appliquée sur le dos de la plaque.

$I/I_0$  a été mesuré en comparant le nombre de désintégrations du Bore dans la région de la plaque recouverte par l'échantillon et hors de cette région.

En 5 heures d'exposition dans ces conditions on obtient environ 5 désintégrations par champ de  $10^{-4} \text{ cm}^2$ .

Une erreur est due aux protons de recul ayant la même longueur ( $7 \mu$ ) que les désintégrations du Bore. Un essai sur une plaque témoin non imprégnée a montré que 15% des traces de  $7 \mu$  étaient des protons.

Une condition essentielle est l'homogénéité de la distribution du Bore dans l'émulsion. Des plaques témoins ont été exposées pour vérifier cette condition, les fluctuations sont inférieures à 3% à l'intérieur d'une surface de  $0,5 \text{ cm}^2$  environ, par contre des différences de 15% se sont manifestées entre les 2 bords distants de 5 cm.

Une étude des meilleures conditions d'imprégnation est nécessaire.

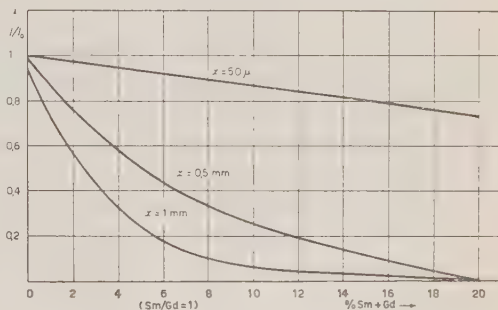


Fig. 1.

Les valeurs suivantes ont été obtenues avec les 2 échantillons étudiés:

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1) Monazite (Shinkolobwe, Congo) . . . | épaisseur $x = 0,1$ cm  |
|  | $I/I_0 = 0,4 \pm 0,04$  |
| 2) Bastnaesite (Congo) . . . . .       | épaisseur $x = 0,12$ cm |
|  | $I/I_0 = 0,47 \pm 0,05$ |

Vu la géométrie mal définie et le spectre complexe des neutrons incidents, on ne peut tirer  $\Sigma$  de ces valeurs de  $I/I_0$ , néanmoins l'ordre de grandeur de  $I/I_0$  pour la monazite est celui qu'on peut attendre d'après les teneurs approximatives en Sm: 2% et en Gd: 0,2% estimées par spectrographie <sup>(5)</sup>.

En conclusion, on peut espérer par cette méthode détecter en lame mince les minéraux riches en Sm et Gd (monazite).

En sections plus épaisses ou sur des fractions enrichies en terres rares, on pourrait mesurer avec une bonne précision la concentration en Sm + Gd. Le Sm peut être dosé séparément par son activité  $\alpha$  <sup>(6)</sup> et le Gd obtenu par différence.

Une méthode de localisation des terres rares basée sur l'activation par neutron <sup>(7)</sup> serait beaucoup plus sensible, surtout si on emploie des flux intenses de neutrons et si on détecte les  $\beta$  émis par des émulsions sensibles aux électrons, mais elle dépendrait essentiellement de la teneur en Dy et Eu qui possèdent des sections efficaces d'activation très élevées.

Ces méthodes sont intéressantes pour l'étude de la géochimie des terres rares.

Nous remercions les professeurs M. COSYNS et G. P. S. OCCHIALINI de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

L'un de nous (I. H. F.) tient à exprimer sa gratitude au Professeur MAX COSYNS pour l'hospitalité qui a lui a été offerte au Centre de Physique Nucléaire de l'Université de Bruxelles.

---

<sup>(5)</sup> R. BRECKPOT, J. THOREAU et J. F. VAES: *Bull. Ac. Roy. de Belgique, Cl. Sci.*, **22**, n. 10 (1936).

<sup>(6)</sup> E. E. PICCIOTTO: *Compt. Rend.*, **229**, 117 (1949).

<sup>(7)</sup> C. GOODMAN et G. A. THOMPSON: *Am. Min.*, **28**, 456 (1943).

## RIASSUNTO

Viene esaminata la possibilità di localizzare i minerali di terre rare in sezioni sottili di rocce e di determinare la concentrazione in Sm + Gd impiegando l'assorbimento di neutroni termici e usando come detettore lastre nucleari caricate al boro.

## Teoria della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici coassiali in campo magnetico trasversale.

G. VALLE

*Istituto di Fisica dell'Università - Bologna*

(ricevuto il 28 Dicembre 1951)

**Riassunto.** — Viene estesa la teoria, svolta precedentemente dall'autore per la determinazione del potenziale di scarica fra elettrodi piani e paralleli in campo magnetico trasversale, al caso di elettrodi cilindrici coassiali. Per ogni particolare geometria del sistema di elettrodi (caratterizzata dal rapporto  $q$  fra la distanza interelettrodica  $R$  e il raggio del cilindro interno  $a$ ) e per ogni valore di  $\overline{HR}$  risulta definita la corrispondente curva di Paschen  $\overline{V} = F(\overline{pR})$ , essendo  $\overline{V}$ ,  $\overline{pR}$ ,  $\overline{HR}$  dei valori normalizzati, riferibili a qualunque gas, di  $V$ ,  $pR$ ,  $HR$  ossia rispettivamente della tensione di scarica, del prodotto della distanza interelettrodica  $R$  per la pressione  $p$  e del prodotto di tale distanza per l'intensità  $H$  del campo magnetico. Quando non si consideri la dipendenza da  $X/p$  del coefficiente dell'effetto  $\gamma$  al catodo e si assegni a  $\gamma$  un valore intermedio costante, il problema, almeno qualitativamente, è risolto da tali curve, che mostrano, entro certi limiti, tutti i quattro tipi di accensione già messi in evidenza nel caso particolare della nota precedente: accensione ordinaria distale e prossimale, accensione magnetica distale e prossimale. Tenendo invece conto della dipendenza di  $\gamma$  da  $X/p$ , di cui è fatto un più largo cenno al n. 1, le curve abbisognano di essere corrette, senza che per questo ne risulti però perturbato il tipico andamento generale. Così come risultano dalla teoria, le curve di Paschen possono riferirsi però indiscriminatamente solo ai casi in cui il cilindro (o filo) interno sia catodo. Per la polarità inversa, che è quella dei contatori G.-M., un limite è posto dal fatto che il campo magnetico, raggiungendo un certo valore, può mettere fuori causa l'effetto  $\gamma$  al catodo, ove in questo caso il campo elettrico  $X$  ha il suo valore più basso. Questa possibilità viene discussa, mentre esperienze in proposito sono in corso.

# 1. — Formule normalizzate per il caso di elettrodi piani e paralleli. L'effetto gamma.

In una nota precedente <sup>(1)</sup> ho sviluppato la teoria della tensione di scarica in campo magnetico trasversale per il caso di elettrodi piani e paralleli. Dalla condizione di Townsend e dal calcolo dell'aumento apparente della pressione del gas lungo le linee di forza elettrica, dovuto all'incurvamento delle traiettorie libere degli elettroni prodotto dal campo magnetico, risultavano definiti, per mezzo di due parametri arbitrariamente variabili, la tensione di carica  $V$ , e i valori corrispondenti del prodotto  $pR$  della pressione vera  $p$  per la distanza interelettrodica  $R$  e del prodotto  $HR$  dell'intensità del campo magnetico  $H$  per questa stessa distanza. Riporto qui le espressioni allora trovate, ma in una nuova forma, più comoda, normalizzata, valevole per qualsiasi gas, in cui è

$$(1) \quad \bar{V} = V/U; \quad \overline{pR} = pR/G; \quad \overline{HR} = HR/S,$$

con

$$(2) \quad U = \frac{B}{A} \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) V; \quad G = \frac{1}{2A} \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \text{ torr cm};$$

$$S = \sqrt{2C_1} \frac{\sqrt{B/\lambda_1}}{A} \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) A.$$

$A$  e  $B$  sono le costanti del coefficiente di ionizzazione  $\alpha$  degli elettroni nella formula di Townsend,  $\gamma$  il coefficiente dell'« effetto gamma » al catodo, rappresentato nella P.N. da un valore medio supposto costante,  $\lambda_1$  il libero cammino medio degli elettroni nel gas alla pressione di 1 torr,  $C_1 = 3,60 \text{ A}/\Omega$  una costante. Le espressioni in discorso sono:

$$(3) \quad \bar{V} = \frac{\exp [x]}{x}; \quad \overline{pR} = \exp [x] \cdot (1 + \cos \varphi_0); \quad \overline{HR} = \frac{\exp [x]}{\sqrt{x}} \cdot \sin \varphi_0,$$

ove  $R$  e  $\varphi_0$  rappresentano i parametri variabili <sup>(2)</sup>.

Nelle formule (2) per la determinazione delle grandezze  $U$ ,  $G$  ed  $S$  entra, fra le altre quantità, il coefficiente  $\gamma$  dell'effetto gamma (estrazione di elettroni secondari) al catodo, sul quale giova ora spendere qualche parola. Il coefficiente  $\gamma$  è in realtà una funzione di  $X/p$ , essendo  $X$  l'intensità del campo elettrico, supposto uniforme, in cui si generano le valanghe elettroniche e quindi anche dell'energia media degli ioni che in esse si formano e che poi raggiungono il catodo. Se l'effetto gamma fosse dovuto esclusivamente all'azione degli

<sup>(1)</sup> G. VALLE: *Nuovo Cimento*, 7, 174 (1950), nota indicata nel testo con P.N.

<sup>(2)</sup> Con riferimento ai simboli usati nella P.N., si ha  $x = B\eta$  e  $\varphi_0 = \omega t/2$ .

ioni positivi sul catodo, il coefficiente  $\gamma$  dovrebbe ovviamente diminuire con l'energia di tali ioni, ossia con  $X/p$ . Ho avuto occasione di mostrare per primo, circa vent'anni or sono <sup>(3)</sup>, che questa presunta diminuzione di  $\gamma$  con l'energia degli ioni non sussiste invece affatto. Ebbi allora precisamente l'idea di misurare  $\gamma$  partendo dalla condizione di Townsend, supposta valida, e prendendo come base sperimentale i valori delle tensioni di scarica nell'aria fra elettrodi piani e paralleli in funzione di  $pR$ , nell'ampio intervallo fra 0,1 e 1 500 torr cm, in cui essi sono ben noti <sup>(4)</sup>; e mi risultò che per le basse energie, invece di presentare il supposto decrescimento monotono, questo coefficiente aumenta nuovamente fino a raggiungere per  $X/p = 40$  V/torr cm un acuto massimo secondario per poi tendere appena a 0.

La fig. 1 mostra, in scala logaritmica, l'andamento trovato per  $\gamma$ , ricalcolato con lo stesso metodo e sugli stessi dati sperimentali di allora, ma con i valori più attendibili delle costanti  $A$  e  $B$  attualmente noti. Naturalmente, di fronte all'inatteso risultato, non potevo che trarne già quella volta la conseguenza che esistessero almeno due cause diverse del-

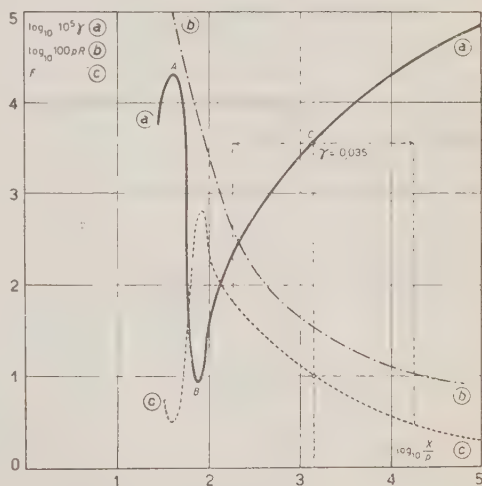


Fig. 1. - Dipendenza dell'effetto  $\gamma$  al catodo da  $X/p$ .

l'effetto gamma. Lasciando da parte un possibile effetto elettrostatico, con estrazione autoelettrica di elettroni, al quale avevo da principio pensato, oggi si ritiene che la seconda causa consista nell'effetto fotoelettrico prodotto sul catodo da fotoni emessi dagli atomi eccitati nello spazio percorso dalle valanghe.

Indipendentemente da me, sei anni dopo la mia pubblicazione, la misura del coefficiente  $\gamma$  è stata fatta, partendo da altri dati sperimentali, da W. E. BOWLS <sup>(5)</sup> per catodi di vari metalli (Pt, Hg, Na) in Azoto e da D. H. HALE <sup>(6)</sup> (Pt, Na) in Idrogeno privo di vapore di Mercurio <sup>(7)</sup>. I dati sperimentali erano

<sup>(3)</sup> G. VALLE: *Atti Acc. Torino*, **67**, (1932).

<sup>(4)</sup> Per es. in G. MIERDEL: *Handb. d. Experimentalphys.*, **13**, III, 130 (1929).

<sup>(5)</sup> W. E. BOWLS: *Phys. Rev.*, **53**, 293 (1938).

<sup>(6)</sup> D. H. HALE: *Phys. Rev.*, **55**, 815 (1939).

<sup>(7)</sup> Cfr. anche in proposito L. B. LOEB: *Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases* (New York, 1947), 2ª ed., cap. IX, p. 373 e segg.



ricavati questa volta da determinazioni dell'intensità di corrente  $i$  in una camera di ionizzazione contenente il gas prescelto, essendo la corrente fotoelettrica primaria  $i_0$  prodotta per irraggiamento del catodo con luce ultravioletta: determinato il primo coefficiente di Townsend  $\alpha$ , dalla formula di Townsend, noto il rapporto  $i/i_0$ , risultava  $\gamma$  e per esso lo stesso andamento che io avevo già trovato. Più tardi W. FUCHS e F. KETTEL<sup>(8)</sup> hanno misurato  $\gamma$  dalla condizione di Townsend partendo da coppie di valori sperimentali corrispondenti di  $V$  ed  $\alpha$  determinati sia da T. L. R. AYRES<sup>(9)</sup> che dagli autori stessi per catodo di Pt in Idrogeno, e ancora naturalmente col medesimo risultato (posizione del massimo relativo di  $\gamma$  per  $X/p = 25$  V/torrem). Questi autori hanno mostrato inoltre come l'ipotesi fotoelettrica, se si consideri anche l'assorbimento dei fotoni nello spazio fino al catodo, può dar ragione dell'andamento di  $\gamma$  per piccoli valori di  $X/p$  (ossia del massimo secondario); mentre anche l'aumento assai notevole di  $\gamma$  per campi forti può essere dovuto alla preponderanza, in tale caso, di fotoni di maggiore  $h\nu$ . Per valori di  $X/p$  intorno al minimo di tensione di scarica e più alti non si può però rinunciare a considerare simultaneamente anche la seconda ipotesi, cioè quella dell'azione degli ioni positivi alla superficie del catodo, o una equivalente. W. FUCHS<sup>(10)</sup> ha ripreso ancora in esame la questione lo scorso anno, non trascurando di mettere in rilievo la mia priorità in argomento.

La variabilità di  $\gamma$  con  $X/p$  incide sui valori delle quantità  $U$ ,  $G$  ed  $S$  introdotte per la normalizzazione, ove  $\gamma$  entra in una espressione logaritmica. La sua influenza è quindi relativamente piccola, quando ci si limiti a considerare campi non eccessivamente bassi né troppo alti rispetto ai valori che si hanno intorno al minimo di tensione di scarica. Ciò significa che il valore di  $pR$  (come si vede dalla fig. 1) non dev'essere né troppo basso né troppo alto rispetto a quello che dà luogo al minimo di  $V$ . A questa condizione, è sufficiente considerare, come si è fatto nella P.N., un valore intermedio di  $\gamma$  e supporlo costante; ottenendo così anche i valori costanti per le quantità  $U$ ,  $G$  ed  $S$ .

Il minimo della tensione di scarica per elettrodi piani e paralleli lo si ha in aria per  $V = 327$  V e  $pR = 0,57$  torrem, ossia per  $X/p = 600$  V/torrem, cui corrisponde una energia media degli ioni positivi di alcuni eV. Valori presumibili di  $\gamma$  per quest'ordine di grandezza, si trovano raccolti a pag. 79 delle G.E.T.<sup>(11)</sup>; da qui è tolto il valore  $\gamma = 0,035$  adottato per  $\gamma$  (in aria e catodo di Al) nella mia P.N. e al quale si fa riferimento molto spesso anche nella presente.

<sup>(8)</sup> W. FUCHS e F. KETTEL: *Zeitschr. f. Phys.*, **116**, 657 (1940).

<sup>(9)</sup> T. L. R. AYRES: *Phil. Mag.*, **45**, 353 (1923).

<sup>(10)</sup> W. FUCHS: *Arch. f. Elektrot.*, **40**, 16 (1950).

<sup>(11)</sup> M. KNOLL, F. OLLENDORFF e R. ROMPE: *Gasentladungstabellen* (Berlin, 1935), opera indicata nel testo con G.E.T.

Del resto la variabilità di  $\gamma$  non interviene nei calcoli, ma solo nell'ulteriore interpretazione quantitativa delle grandezze  $\bar{V}$ ,  $\bar{pR}$  ed  $\bar{HR}$  che risultano, indipendentemente da  $\gamma$ , dalla teoria svolta. Conviene quindi considerare dapprima, come in P.N., tali risultati supponendo  $\gamma$  e quindi  $U$ ,  $G$  ed  $S$  come costanti e tener conto, quando occorra, della variabilità di  $\gamma$  in sede di correzione dei valori di queste tre grandezze. Si calcola facilmente, dai valori di  $\gamma$ , il fattore  $f$  per cui bisogna moltiplicare le costanti  $U$ ,  $G$  ed  $S$ , calcolate con  $\gamma = 0,035$  secondo le formule (2), per correggerne i valori. Tale fattore  $f$  è pure riportato in funzione di  $\log_{10}(X/p)$  nella fig. 1. La quantità  $X/p$  è d'altra parte nota in ogni punto del piano  $[\bar{pR}, \bar{V}]$  essendo, per elettrodi piani e paralleli:

$$X/p = V/pR = 2B \cdot \bar{V}/\bar{pR},$$

ossia, nella rappresentazione logaritmica adottata in questa nota:

$$\log_{10}(X/p) = \log_{10} 200B + \log_{10} \bar{V} - \log_{10} 100\bar{pR},$$

da cui:

$$\log_{10} \bar{V} = [\log_{10} X/p - \log_{10} 200B] + \log_{10} 100\bar{pR}.$$

Le linee  $X/p = \text{cost}$  sono quindi, nel piano  $[\log_{10} 100\bar{pR}, \log_{10} \bar{V}]$ , delle rette inclinate di  $45^\circ$  rispetto all'asse delle ascisse.

Nella seguente tabella sono indicate a scopo di orientamento, per vari gas, le costanti che interessano, per quanto molto incertamente note, in gran parte ricavate dalle G.E.T., e i valori che ne risultano, secondo le formule (2), per  $U$ ,  $G$  ed  $S$ .

TABELLA I. — Costanti caratteristiche per vari gas.

Gas	$A$	$B$	$\lambda_1$	$\gamma^*$	$\log\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$	$U$	$G$	$S$
Aria	14,6	365	0,026	0,035	3,39	85 (120) **	0,12 (0,10) **	74
A	13,6	235	0,029	0,120	2,23	39	0,08	39
N <sub>2</sub>	12,4	342	0,026	0,100	2,40	66	0,09	61
H <sub>2</sub>	5,0	130	0,049	0,095	2,44	63 (103) **	0,24 (0,21) **	68
He	2,8	34	0,077	0,021	3,88	47	0,69	78

\* Valori relativi a catodi di Al.

\*\* Valori più attendibili determinati dal minimo di tensione nella curva di Paschen sperimentale per elettrodi piani e paralleli:  $U = V_{\min}/e$ ,  $G = (pR)_{\min}/2e$ ;  $e$ , base dei logaritmi naturali.

## 2. - Condizioni particolari nel caso di elettrodi cilindrici.

Per il fatto che si presta meglio all'esperimento e per l'interesse che presenta tale forma di elettrodi in quanto è usata nei contatori G.-M., ho ritenuto conveniente estendere la teoria svolta nella mia P.N. al caso di elettrodi cilindrici coassiali. La configurazione geometrica di un tale sistema di elettrodi può essere caratterizzata (fig. 2) dal rapporto  $\varrho = R/a$  tra la distanza interelettro-

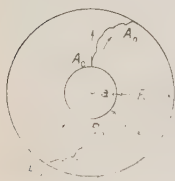


Fig. 2.

dica  $R$  e il raggio  $a$  del cilindro interno; ad ogni valore di  $\varrho$  corrispondono così infinite dimensioni diverse ma simili del sistema, perchè la distanza interelettrodotica  $R$  può ancora essere variata a piacere fermo restando il valore di  $\varrho$  e variando convenientemente  $a$  da 0 a  $\infty$ . Nei limiti di approssimazione della teoria che sarà svolta, verrà così a essere valida ancora la legge di similitudine che fa dipendere la tensione di scarica soltanto dal prodotto  $pR$ , se  $R$  s'intenderà variato, variando anche  $a$ , in modo da tenere costante il rapporto  $\varrho$ . Per  $\varrho = 0$  si ricade naturalmente nel caso di elettrodi piani e paralleli, mentre per  $\varrho$  grande ci si avvicina alla configurazione tipica

dei contatori con elettrodo interno filiforme. L'espressione  $\sigma = \frac{\varrho}{\log(1 + \varrho)}$  prende il nome di «fattore di forma» ed è  $\sigma = 1$  per  $\varrho = 0$ ,  $\sigma = \infty$  per  $\varrho = \infty$ .

Ciò che distingue, agli effetti del nostro problema, il caso degli elettrodi cilindrici da quello degli elettrodi piani è il fatto che il campo elettrico non è più costante, ma diminuisce in valore assoluto, qualunque sia il segno dell'elettrodo interno, procedendo da questo verso l'elettrodo esterno. E poichè in entrambi i casi il campo magnetico trasversale si suppone uniforme in tutto lo spazio interelettrodotico, risulta che la pressione apparente del gas deve crescere procedendo dall'elettrodo interno verso l'esterno. Difatti un elettrone che abbandoni a un dato istante in  $A_0$  (fig. 2) l'elettrodo interno (supposto catodo) o in  $B_0$  l'elettrodo esterno (supposto catodo) e che compia  $n$  urti ionizzanti fino a raggiungere l'altro elettrodo, dovrà percorrere rispettivamente il cammino  $A_0A_n$  o il cammino  $B_0B_n$ , formati di  $n$  archi di lunghezza in media eguale per tutti al libero cammino medio degli elettroni  $\lambda = \lambda_0/p$  alla pressione effettiva  $p$  del gas, ma tanto più incurvati quanto più vicini, questi archi, sono all'elettrodo esterno, ove il campo elettrico è più debole. Il campo magnetico è supposto diretto normalmente al piano del disegno nel verso di chi guarda.

Se  $n$  è sufficientemente grande, il campo elettrico può ritenersi costante entro lo spazio di un libero cammino medio; in tale caso gli archi considerati appartengono a cicloidi comuni e si può calcolare con formule indicate nella P.N. la pressione apparente del gas che corrisponde a ciascuno degli archi stessi. In effetti, così facendo, poichè tutto dipende dalla distanza  $r$  (fig. 2)

del posto considerato dalla superficie dell'elettrodo interno, e in particolare si sa come varia il campo elettrico  $X(r)$  con  $r$ , si viene a stabilire una legge sufficientemente approssimata per la dipendenza della pressione apparente  $p_H(r)$  del gas dalla distanza  $r$ . Il problema si riduce quindi a determinare, valendosi di metodi noti, la tensione di scarica per il caso di elettrodi cilindrici fra i quali ci sia un ipotetico gas, la cui pressione aumenti secondo quella legge approssimata a partire dalle superficie dell'elettrodo interno fino alla superficie di quello esterno. Ciò che interessa è naturalmente la componente radiale del moto degli elettroni da un elettrodo all'altro, giacchè alla formazione degli ioni positivi, diretti praticamente, per la loro massa molto maggiore, lungo il raggio che va verso  $A_0$  o verso  $B_0$ , provvedono ovviamente con le loro rispettive valanghe altri elettroni emessi simultaneamente da punti dell'elettrodo diversi da  $A_0$  o da  $B_0$  e posti, nel nostro caso, a sinistra di essi.

Il parametro angolare  $q_0$  (compreso fra 0 e  $\pi$ ) del quale è stato fatto cenno già al n. 1, si riferisce, nella presente teoria, alle condizioni che sussistono in immediata vicinanza dell'elettrodo interno (qualunque sia il segno di esso), ove la pressione apparente è la più bassa. L'angolo  $q_0$  determina la lunghezza dell'arco di cicloide,  $\widehat{Oz} = 4a(r)(1 - \cos q_0)$  descritto da un elettrone fra un urto e l'altro in quelle condizioni. Esso è il minore fra i  $q(r)$  degli archi successivi, perchè nel campo elettrico più debole che si ha procedendo verso l'elettrodo esterno, ove  $a(r)$  diminuisce, la condizione  $\widehat{Oz} = \lambda - \lambda_1 p$  impone che  $q(r)$  cresca oltre il valore di  $q_0$ . Il limite è  $q(r) \sim \pi$ , perchè, se tale diventa  $q(r)$ , un elettrone non può più procedere in senso radiale e i punti in cui potrebbero avvenire i suoi urti successivi si dispongono lungo una circonferenza avente il centro sull'asse comune degli elettrodi.

Da ciò ha origine la differenza tra i due casi in cui è catodo il cilindro interno oppure l'esterno. Nel primo caso, ossia se gli elettroni partono dalla superficie del cilindro interno, scelto che s'abbia opportunamente il campo magnetico, può senz'altro avvenire ciò che si è detto ad una distanza qualunque  $\delta$ , compresa fra 0 ed  $R$ , dal cilindro interno. Ivi la pressione apparente del gas diventa infinitamente grande e la superficie cilindrica coassiale avente questa distanza dal catodo viene a costituire una specie di anodo virtuale o «apocatodo», più vicino al catodo dell'anodo reale (fig. 3a). La condizione di Townsend si scrive allora

$$\int_0^{\delta} \alpha(r) dr = \log(1 + 1/\gamma),$$

e richiede che già sul solo percorso dal catodo all'apocatodo le valanghe elettroniche riescano a garantire l'estrazione di tanti elettroni dal catodo quanti ne occorrono per provocare il ripetersi dell'identico processo (elettroni di rifornimento). Se invece è catodo il cilindro esterno, uscendo gli elettroni da que-

st'ultimo, il caso limite è ovviamente quello in cui  $\varphi(r) \sim \pi$  alla superficie di esso; allora gli elettroni non possono più abbandonare il catodo e le corrispon-

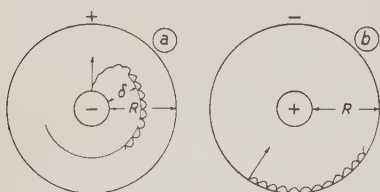


Fig. 3.

denti valanghe non si formano più (fig. 3b); nella condizione di Townsend il limite superiore d'integrazione non può in questo caso che essere sempre  $R$  e quando la pressione apparente alla superficie dell'elettrodo esterno diventa infinitamente grande, la scarica non dovrebbe essere più in grado di adescarsi, semprechè, s'intende, non intervenissero altri processi di rifornimento di elet-

troni nell'interno del gas in sostituzione dell'effetto gamma alla superficie del catodo, che il campo magnetico mette, almeno nel primo inizio della scarica, completamente fuori causa.

### 3. — Parte analitica.

Il campo elettrico  $X(r)$  fra gli elettrodi cilindrici considerati è, con i simboli usati

$$(4) \quad X(r) = U \frac{\sigma \bar{V}}{R} \cdot \frac{1}{1 + e \frac{r}{R}},$$

il raggio del cerchio generatore della cicloide percorsa da un elettrone in questo campo è (cfr. P.N.)

$$a(r) = C_1 \frac{UR}{S^2} \frac{\sigma \bar{V}}{(\overline{HR})^2} \cdot \frac{1}{1 + e \frac{r}{R}} = \frac{\lambda_1 R}{4G} \frac{\sigma \bar{V}}{(\overline{HR})^2} \cdot \frac{1}{1 + e \frac{r}{R}}.$$

Dalla condizione  $4a(r) \cdot [1 - \cos \varphi(r)] = \lambda_1/p$  si ha quindi:

$$1 - \cos \varphi(r) = \frac{(\overline{HR})^2}{pR \cdot \sigma \bar{V}} \left( 1 + e \frac{r}{R} \right),$$

da cui, per  $r = 0$ :

$$(5) \quad 1 - \cos \varphi_0 = \frac{(\overline{HR})^2}{pR \cdot \sigma \bar{V}},$$

e inoltre

$$1 + \cos \varphi(r) = (1 + \cos \varphi_0) \left( 1 - e \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{r}{R} \right).$$



Per la pressione apparente al posto considerato si ha in conseguenza

$$p_H(r) = \frac{2p}{1 + \cos \varphi(r)} = \frac{U}{BR} \cdot \frac{p\bar{R}}{1 + \cos \varphi_0} \cdot \frac{1}{1 - \varrho \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{r}{R}},$$

e dividendo per  $X(r)$ :

$$\frac{p_H(r)}{X(r)} = \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} \cdot \frac{p\bar{R}}{\sigma \bar{V}} \cdot \frac{1 + \varrho \frac{r}{R}}{1 - \varrho \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \frac{r}{R}}.$$

Ponendo infine, a definizione di due parametri  $\xi$  ed  $\eta$ :

$$(6) \quad \frac{\xi}{\varrho} = \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} \cdot \frac{p\bar{R}}{\sigma \bar{V}}; \quad \frac{\eta}{\varrho} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2}.$$

queste relazioni si possono scrivere anche:

$$p_H(r) = \frac{U}{B} \cdot \frac{\sigma \bar{V}}{R} \cdot \frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1}{1 - \eta \frac{r}{R}}; \quad \frac{p_H(r)}{X(r)} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1 + \varrho \frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}}.$$

Col loro aiuto si calcola il coefficiente di ionizzazione  $\alpha(r)$  degli elettroni al posto considerato mediante la formula di Townsend:

$$\alpha(r) = A p_H(r) \exp \left[ -B \frac{p_H(r)}{X(r)} \right] = \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\sigma \bar{V}}{R} \cdot \frac{\xi/\varrho}{1 - \eta \frac{r}{R}} \cdot \exp \left[ -\frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1 + \varrho \frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}} \right].$$

La condizione di Townsend, applicata con i criteri indicati al n. 2 impone che sia

$$(7) \quad \int_{r=0}^{r=\delta} \alpha(r) dr = \int_{r=0}^{r=\delta} R \alpha(r) d \frac{r}{R} = \log \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right),$$

e quindi

$$(8) \quad \frac{\xi}{\varrho} \cdot \sigma \bar{V} \int_{r=0}^{r=\delta} \frac{d \frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}} \exp \left[ -\frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1 + \varrho \frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}} \right] = 1,$$

con  $\delta = R$  per  $\eta \leq 1$  (in entrambi i casi: catodo interno e catodo esterno):  
con  $\delta = (R/\eta)$  per  $\eta > 1$  (nel solo caso che il catodo sia interno).

La pressione apparente  $p_H(r)$  diventa infatti infinitamente grande per  $r = R$  se  $\eta = 1$ , per  $r = R/\eta < R$  se  $\eta > 1$ , condizione quest'ultima, che, come si è detto al n. 3, ha significato soltanto se il cilindro interno funge da catodo.

Indicando con  $\mathcal{I}$  l'integrale

$$(9) \quad \mathcal{I} = \int_{r=0}^{r=\delta} \frac{d\frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}} \exp \left[ -\frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1 + \eta \frac{r}{R}}{1 - \eta \frac{r}{R}} \right],$$

con le condizioni per  $\delta$  suindicate, si ha infine

$$(10) \quad \sigma V = \frac{1}{\xi \varrho} \cdot \frac{1}{\mathcal{I}},$$

ed eseguendo l'integrazione:

$$(11) \quad \sigma V = \frac{\exp \left[ \frac{\xi}{\varrho} \right]}{\xi \varrho} \cdot Q(k, \eta),$$

ove è

$$(12) \quad Q(k, \eta) = \frac{\eta \exp[-k]}{\text{Ei}[-k] + \text{Ei} \left[ -\frac{k}{1 - \varepsilon} \right]},$$

con  $\varepsilon = \eta$  per  $\eta \leq 1$  ed  $\varepsilon = 1$  per  $\eta > 1$  <sup>(12)</sup>.

La quantità indicata per brevità con  $k$  è

$$(13) \quad k = \frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{1 + \eta/\varrho}{\eta/\varrho}.$$

La fig. 4 rappresenta l'andamento della funzione  $Q(k, \eta)$ , della quale a scopo di orientamento sono riportati nella seguente tabella II alcuni valori numerici.

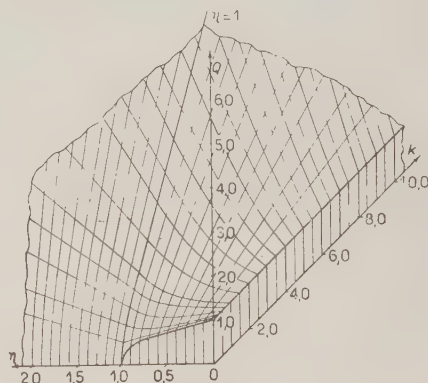


Fig. 4. — La funzione  $Q(k, \eta)$ .

<sup>(12)</sup> Ei è la funzione integrale esponenziale definita da

$$\text{Ei}[-x] = \int_x^{\infty} \frac{\exp[-t]}{t} dt,$$

della quale si trovano tabelle numeriche sufficientemente ampie in E. JAHNKE e F. EMDE: *Funktionentafeln* (Leipzig, 1938).

TABELLA II. — Valori della funzione  $Q(k, \eta)$ .

$k \backslash \eta$	0	0,01	0,1	0,3	0,9	1	5	10
0	1,00	0,99	0,94	0,72	0,39	0	0	0
0,001	1,00	0,99	0,94	0,72	0,39	0,140	0,70	1,40
0,01	1,00	0,99	0,94	0,72	0,40	0,245	1,23	2,45
0,1	1,00	1,00	0,96	0,76	0,54	0,496	2,48	4,96
1	1,00	1,00	1,00	1,08	1,52	1,677	8,39	16,77
5	1,00	1,03	1,27	3,08	5,32	5,87	29,4	58,7
10	1,00	1,06	1,57	5,40	9,70	10,92	54,6	109,2
15	1,00	1,10	2,50	8,55	14,45	15,95	79,8	159,5

Dalle relazioni (6) che definiscono  $\xi$  ed  $\eta$  risulta subito

$$(14) \quad \overline{pR} = \frac{\xi}{\varrho} \cdot (1 + \cos \varphi_0) \cdot \sigma V = \frac{\xi}{\varrho} \cdot \frac{2}{1 + \eta/\varrho} \cdot \sigma \dot{V};$$

inoltre dalla (5) che ci dà  $(1 - \cos \varphi_0)$  si ha con facile calcolo e sempre tenendo conto del significato di  $\eta/\varrho$ :

$$(15) \quad \overline{HR} = \frac{2\sqrt{\xi/\varrho} \sqrt{\eta/\varrho}}{1 + \eta/\varrho} \cdot \sigma V.$$

In complesso il nostro problema può considerarsi risolto dalle tre relazioni (11), (14), (15). Basta sostituire in (14) e (15) l'espressione di  $\sigma \dot{V}$  data dalla (11) per avere tre relazioni analoghe alle (3) riportate al n. 1, riguardanti il caso di elettrodi piani e paralleli. Esse sono:

$$(16a) \quad V = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\exp [\xi/\varrho]}{\xi/\varrho} \cdot Q(k, \eta),$$

$$(16b) \quad \overline{pR} = \frac{2}{1 + \eta/\varrho} \cdot \exp [\xi/\varrho] \cdot Q(k, \eta),$$

$$(16c) \quad \overline{HR} = \frac{2\sqrt{\eta/\varrho}}{1 + \eta/\varrho} \cdot \frac{\exp [\xi/\varrho]}{\sqrt{\xi/\varrho}} \cdot Q(k, \eta).$$

Difatti per  $\varrho = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  rimangono diversi da zero e arbitrari i rapporti  $\xi/\varrho = x$  e  $\eta/\varrho = \operatorname{tg}^2(\varphi_0/2)$ . Si ha  $\sigma = 1$  e  $Q = 1$ , perchè  $\eta = 0$ , e sostituendo si arriva subito alle corrispondenti relazioni (3).

Quanto al calcolo in base alle (16) della « curva di Paschen »  $\bar{V} = F(\bar{p}\bar{R})$  per vari  $\bar{H}\bar{R}$ , fissata che sia una certa geometria del sistema di elettrodi mediante il valore di  $\varrho$  (e quindi di  $\sigma$ ), conviene ricorrere alla (16c) che si può scrivere, dopo qualche riduzione:

$$(17) \quad \bar{H}\bar{R} = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{\exp \left[ k \frac{\eta/\varrho}{1 + \eta/\varrho} \right]}{\sqrt{1 + \eta/\varrho}} \cdot Q(k, \eta),$$

e determinare la famiglia di curve  $\bar{H}\bar{R} = g(k)$  con parametro  $\eta$  (curve risolventi, come per esempio nella fig. 5, quelle per  $\varrho = 10$ ; ove  $k$  ed  $\eta$  sono riportate in scala logaritmica e precisamente con  $\log_{10} 1000R$  e  $\log_{10} 1000\eta$ ).

Da questa famiglia di curve, fissato il valore desiderato di  $\bar{H}\bar{R}$ , si desumono, dalle intersezioni con la rispettiva retta parallela all'asse delle ascisse, le corrispondenti coppie di valori di  $k$  ed  $\eta$ , da ciascuna delle quali si calcola poi subito la rispettiva coppia di valori  $\bar{p}\bar{R}$  e  $\bar{V}$  relativa a un punto particolare della curva di Paschen cercata. Per il calcolo servono le seguenti relazioni:

$$(18a) \quad \bar{V} = \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{(1 + \eta/\varrho)^{3/2}}{\sqrt{k} \cdot \eta/\varrho} \cdot \bar{H}\bar{R},$$

$$(18b) \quad \bar{p}\bar{R} = \frac{\sqrt{k}}{(1 + \eta/\varrho)^{1/2}} \cdot \bar{H}\bar{R},$$

che si ricavano con l'aiuto della (17) rispettivamente da (16a) e da (16b).

Nel procedere alla determinazione delle intersezioni con le curve risolventi conviene seguire l'ordine indicato in fig. 5, procedendo da destra verso sinistra da  $\alpha$  ( $\eta$  molto piccolo) a  $\beta$  ( $\eta = 1$ ), poi ancora nello stesso senso, considerando le sole curve tratteggiate ( $\eta > 1$ ), fino a  $\gamma$  (nuovo incontro con la curva  $\eta = 1$ ) e infine, procedendo in senso inverso e considerando le sole curve a tratto continuo ( $\eta < 1$ ), fino all'incontro, in  $\delta$ , con la curva  $\eta = 0$ . Così facendo, la

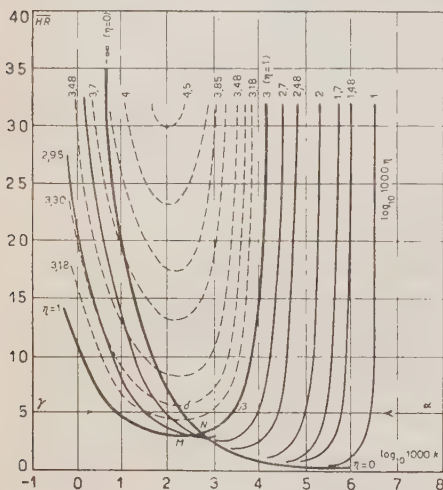


Fig. 5. - Curve risolventi per  $\varrho = 10$ .

rendo le sole curve tratteggiate ( $\eta > 1$ ), fino a  $\gamma$  (nuovo incontro con la curva  $\eta = 1$ ) e infine, procedendo in senso inverso e considerando le sole curve a tratto continuo ( $\eta < 1$ ), fino all'incontro, in  $\delta$ , con la curva  $\eta = 0$ . Così facendo, la

curva di Paschen che si deduce e che per valori di  $\overline{HR}$  sufficientemente elevati ha, in scala logaritmica sempre l'aspetto rappresentato nella fig. 6 (per  $\varrho = 10$  e  $\overline{HR} = 5$ ), risulta percorsa nel senso  $\alpha\mu\beta\gamma\delta$ .

Dalle curve risolventi  $\overline{HR} = g(k)$  costante  $\eta$  per un dato  $\varrho$  (come per es. quelle della fig. 5 per  $\varrho = 10$ ) interessa in particolare la curva relativa ad  $\eta = 0$ . In tale caso è  $Q = 1$  per ogni  $k$  finito e, dalla (17), si ha:

$$(17^*) \quad \overline{HR} = 2/\sqrt{k},$$

per qualsiasi  $\varrho$ . La curva invece, del pari interessante, relativa ad  $\eta = 1$ , essendo in tale caso

$$Q = \frac{\exp[-k]}{-\text{Ei}[-k]},$$

poichè:  $\text{Ei}[-\infty] = 0$ , ha l'equazione

$$(17^{**}) \quad \overline{HR} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \cdot \frac{\exp\left[-k \frac{\varrho}{1+\varrho}\right]}{-\text{Ei}[-k]},$$

diversa per ogni  $\varrho$ . Le due curve sono indicate nella fig. 5 con linee più spesse.

#### 4. - Discussione dei risultati.

Le curve di Paschen relative a un determinato  $\overline{HR}$  sono dunque, come si è detto, per valori non troppo bassi di  $\overline{HR}$ , della forma indicata nella fig. 6. Si riconoscono in esse le stesse caratteristiche messe in evidenza già nella P.N. per il caso di elettrodi piani e paralleli: in particolare il prolungarsi della possibilità di accensione della scarica sotto quel limite minimo di  $\overline{pR}$  per cui, senza campo magnetico (curva a punto e linea), l'accensione è impossibile; e inoltre il manifestarsi di quattro tipi di accensione diversi ai margini della superficie

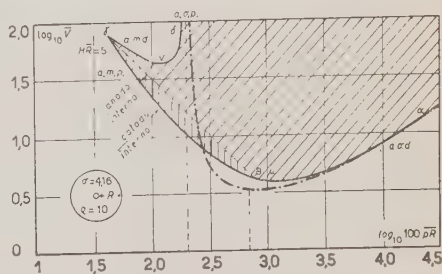


Fig. 6. - Curva di Paschen in campo magnetico  $\overline{HR} = 5$  per elettrodi cilindrici con  $\varrho = 10$ .



tratteggiata racchiusa dalla curva di Paschen: l'accensione magnetica prossimale (a.m.p.) e quella distale (a.m.d.), l'accensione ordinaria prossimale (a.o.p.) e quella distale (a.o.d.).

Nel nostro caso però tutti i quattro tipi di accensione si presentano solo in un certo intervallo di tensione; per tensioni più basse si hanno invece solo il primo e l'ultimo tipo, per tensioni più alte solo le accensioni ordinarie, prossimale e distale, come senza campo magnetico. Il limite di  $\overline{pR}$  sotto il quale non si ha più accensione è per  $\bar{V} \rightarrow \infty$  quello stesso che si ha senza campo:  $\overline{pR} = 2$ , indipendentemente anche da  $\varrho$  ( $\log_{10} 100\overline{pR} = 2,30$ ). Dalla (16a) si ha infatti, poichè  $Q$  non è nullo,  $\bar{V} = \infty$  per  $\xi/\varrho = 0$ . Ma essendo anche  $\overline{HR}$  non nullo, per la (16c) è pure  $\eta/\varrho = 0$  e quindi  $Q = 1$ , sicchè risulta dalla (16c):  $\overline{pR} = 2$ .

Quanto alla curva di Paschen relativa ad  $\overline{HR} = 0$  riportata per confronto nella medesima fig. 6, essa risulta dalle seguenti due relazioni:

$$(19a) \quad \bar{V} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\exp [\xi/\varrho]}{\xi/\varrho} \cdot \frac{\xi}{1 - \exp [-\xi]},$$

$$(19b) \quad \overline{pR} = 2 \cdot \exp [\xi/\varrho] \cdot \frac{\xi}{1 - \exp [-\xi]},$$

in cui si trasformano le (16a) e (16b), quando è  $\overline{HR} = 0$ . Per  $\overline{HR} = 0$  si deve avere infatti, secondo la (16c),  $\eta/\varrho = 0$ ; ma  $\xi/\varrho \neq 0$ , quindi  $k = \infty$ ; e si trova facilmente che

$$Q(\infty, 0) = \frac{\xi}{1 - \exp [-\xi]},$$

sicchè risultano subito le (19), che si possono calcolare anche direttamente ponendo, prima di risolvere l'integrale  $\mathcal{J}$  di (9):  $\eta = 0$  e  $\delta = R$ . Del resto le formule (19) non ci danno in realtà nulla di nuovo, perchè, sebbene in altra forma, la determinazione teorica, sulla base della condizione di Townsend, della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici, senza campo magnetico, è stata fatta già da lungo tempo <sup>(13)</sup>. Il minimo di  $\mathcal{J}$  si verifica per  $\overline{pR} = 2[(1 + \varrho)/\sigma] \cdot \exp [1/\sigma]$  ed ha il valore  $\bar{V}_{\min} = [(1 + \varrho)/\sigma] \exp [1/\sigma]$ .

Ritorniamo ora a considerare la tipica curva delle tensioni di scarica in campo magnetico rappresentata nella fig. 6; dal confronto con la fig. 5 risulta che ai punti della curva compresi fra  $\beta$  e  $\gamma$  (si tratta in questo caso di una parte della curva riguardante l'accensione magnetica prossimale) corrispondono valori di  $\eta$  maggiori dell'unità. Se ne conclude, in base alle considerazioni svolte al n. 2, che l'accensione della scarica, nell'ipotesi adottata di un

<sup>(13)</sup> G.E.T.. p. 81.

rifornimento di elettroni soltanto per effetto gamma al catodo, può avvenire in quei punti soltanto quando il catodo è interno.

Nasce quindi il problema relativo al caso della polarità inversa, in cui sia catodo cioè il cilindro esterno e anodo l'interno. Attenendosi strettamente all'effetto gamma come unica fonte di rifornimento di elettroni e a tutta la schematizzazione un po' rigida della nostra teoria, è ovvio che si deve ammettere che l'accensione della scarica non può avvenire, in questo caso, altro che nei punti in cui è  $\eta = 1$ . Essi sono quelli della retta inclinata di  $135^\circ$  (nella rappresentazione in scala logaritmica) che congiunge i punti  $\beta$  e  $\gamma$ . Si ha infatti dalla (5):

$$V \cdot \overline{pR} = \frac{1}{\sigma} \frac{(\overline{HR})^2}{1 - \cos \varphi_0},$$

e poichè per  $\eta = 1$  è  $\text{tg}^2(\varphi_0/2) = 1/\varrho$ :

$$\overline{V} \cdot \overline{pR} = \frac{1 + \varrho}{\sigma} (\overline{HR})^2,$$

da cui, posto  $\mathcal{R} = \log_{10}[(1 + \varrho)/\sigma] + 2(\log_{10} \overline{HR} + 1)$ , risulta

$$\log_{10} \overline{V} = \mathcal{R} - \log_{10} 100 \overline{pR},$$

che è appunto l'equazione della retta suindicata.

Nei punti, però, di questa retta, la condizione di Townsend è già largamente superata trovandosi tali punti in un campo in cui l'incremento di ionizzazione  $\mu$  è maggiore dell'unità.

$$\int_0^R \alpha(r) dr = \log \left( 1 + \frac{\mu}{\gamma} \right); \quad \mu > 1.$$

Accendendosi la scarica in tali condizioni, dovrebbe quindi aversi un ben più rapido e precipitoso aumento dell'intensità di corrente che non in condizioni normali. Comunque è certo, perchè  $\eta = 1$ , che la scarica nei punti della retta  $\beta\gamma$  deve accendersi. La questione è piuttosto questa: cosa avviene nelle condizioni caratterizzate dai punti compresi fra questa retta e l'arco della curva di Paschen ricavata dalla teoria? In tutti questi punti è  $\eta > 1$  e  $\mu > 1$ .

La prima disuguaglianza ci dice che l'intervento del catodo quale rifornitore di elettroni per la formazione delle valanghe è abolito dal campo magnetico, per cui resta eliminato nel processo iniziale di scarica l'effetto gamma, sia esso dovuto all'azione degli ioni positivi o a quella dei fotoni emessi dall'interno del gas o a qualunque altra causa. La seconda disuguaglianza ci dice che basterebbe già un ipotetico rifornimento di elettroni partenti dalla regione dell'apocotodo ( $\delta = R/\eta$ ) per avere, con  $\mu = 1$ , l'adescamento della scarica.

S'accende o no la scarica in queste condizioni? La questione potrà essere naturalmente risolta e chiarita soltanto dall'esperienza. Dalla nostra teoria, mi pare che si possa soltanto concludere sull'esistenza, nel caso di elettrodi cilindrici dei quali l'esterno sia catodo e in un campo magnetico trasversale sufficientemente elevato, di un intervallo critico della tensione compreso fra il valore normale di essa per la polarità inversa (catodo interno, anodo esterno), e quello, più elevato, determinabile sulla retta  $\beta\gamma$ , intervallo in cui l'accensione della scarica non può che dipendere dall'intervento di fattori diversi da quelli presi in considerazione nella formulazione della teoria.

Così l'accensione della scarica potrebbe essere determinata dal trascurato intervento della ionizzazione nel gas da parte degli ioni positivi (« effetto beta »), quella ionizzazione che stava a base della originaria teoria di Townsend e alla quale G. MEDICUS <sup>(14)</sup> ritiene che si debba ancora dare molta importanza, proprio con riferimento ai dati sperimentali quantitativi raccolti, pur senza campo magnetico, per il caso di elettrodi cilindrici coassiali.

Ma anche uno o più elettroni prodotti nello spazio fra l'apocatodo e il cilindro interno potrebbero già con la loro prima valanga produrre (quando fosse in particolare  $\eta$  maggiore, ma molto prossimo all'unità) una carica spaziale positiva sufficiente per deformare il campo elettrico dalla parte del cilindro esterno, tanto da spostare la superficie apocatodica fino al catodo, rendere  $\eta = 1$  e consentire quindi il rifornimento ulteriore di elettroni dal catodo per effetto gamma.

Non mi sono note osservazioni sperimentali specifiche riguardo a un effetto di polarità, con campo elettrico fortemente disomogeneo ( $\varrho$  grande), prodotto dal campo magnetico (un effetto di polarità lo si ha in realtà per  $\varrho$  grande anche senza campo magnetico); per un campo elettrico solo debolmente disuniforme ( $\varrho$  piccolo), M. WEHLI <sup>(15)</sup> ha comunque trovato, per le pressioni più elevate, un effetto del campo magnetico trasversale (aumento dalla tensione di scarica) fino al 10 % maggiore con catodo esterno che con catodo interno. L'effetto, in senso contrario, e molto cospicuo, trovato da F. M. PENNING <sup>(16)</sup> in un suo tubo si spiega altrimenti, data la particolare conformazione degli elettrodi e non ha a che vedere col nostro. Spero quindi di poter dare fra breve notizie di qualche più preciso risultato sperimentale su questa questione. Per ora si può considerare l'intervallo fra la retta e l'arco  $\beta\gamma$ , per ogni valore di  $\bar{p}R$ , soltanto come un intervallo d'incertezza entro il quale è compresa la tensione di scarica  $\bar{V}$  in campo magnetico nel caso che l'elettrodo interno sia anodo, mentre per la polarità inversa l'incertezza non sussiste e vale come tensione di scarica il limite inferiore dell'intervallo stesso. I punti  $\beta$  e  $\gamma$  sono determi-

<sup>(14)</sup> G. MEDICUS: *Zeitschr. f. angew. Phys.*, **1**, 106 (1948).

<sup>(15)</sup> M. WEHLI: *Ann. d. Phys.*, (4), **69**, 285 (1922).

<sup>(16)</sup> F. M. PENNING: *Physica*, **3**, 873 (1936).

nati per ogni  $\overline{HR}$  dalle intersezioni, indicate con eguali simboli, della retta  $\overline{HR}$  costante, con la curva  $\eta = 1$  (fig. 5). Per  $\overline{HR}$  minore del minimo della curva, le intersezioni  $\beta$  e  $\gamma$  non esistono più, cioè, per ogni particolare geometria del sistema di elettrodi ( $\varrho$ ), si ha un  $\overline{HR}$  minimo, sotto il quale deve cessare ogni

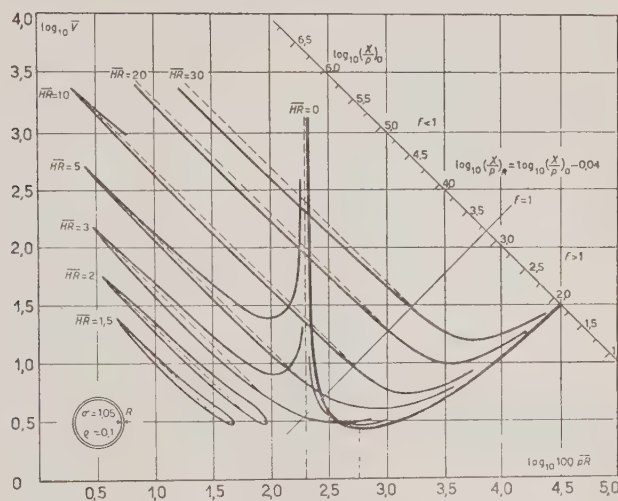


Fig. 7. - Curve di Paschen per elettrodi cilindrici ( $\varrho = 0,1$ ) e vari campi magnetici trasversali.

effetto di polarità dovuto al campo magnetico; gli intervalli d'incertezza non esistono più. La fig. 7 rappresenta le curve di Paschen calcolate in base alla nostra teoria per  $\varrho = 0,1$  e vari valori di  $\overline{HR}$ . Nella fig. 8 sono rappresentate le analoghe curve per  $\varrho = 10$ . In entrambe le figure sono inoltre riportate, tratteggiate, le rette che limitano le rispettive regioni d'incertezza. Risulta così ben evidente che tali regioni sono più ampie e si estendono fra valori più elevati di  $\overline{pR}$ , quanto maggiori sono  $\varrho$  ed  $\overline{HR}$ . Dalla fig. 7 relativa ad una  $\varrho$  piccola, appare già chiaro il collegamento con i risultati conseguiti per elettrodi piani e paralleli ( $\varrho = 0$ ) nella mia P.N. I punti  $\beta$  e  $\gamma$  sono già per  $\varrho = 0,1$  molto spostati verso i piccoli valori di  $\overline{pR}$ ; per  $\varrho = 0$  ogni effetto di polarità deve infatti scomparire e così pure le intersezioni  $\beta$  e  $\gamma$ .

Inoltre si ha, per bassi valori di  $\overline{HR}$ , la separazione della curva di Paschen in due parti distinte (fig. 7), come s'era già trovato per  $\varrho = 0$ . Per valori di  $\overline{HR}$  ancora minori, sotto quello corrispondente al minimo  $M$  della curva  $\eta = 1$ , la curva di Paschen si riduce infine a un ramo solo di andamento analogo a quello che si ha senza campo magnetico.

Dalle curve delle figg. 7 e 8 risulta anche chiaro come l'andamento delle linee  $\bar{V} = \Phi(\bar{H}\bar{R})$  costante  $\bar{p}\bar{R}$  (ossia per un determinato spazio di scarica) presenta anche fra elettrodi cilindrici tre tipi diversi: il primo, per  $\bar{p}\bar{R} < 2$  in cui  $\bar{V}$  è crescente con  $\bar{p}\bar{R}$ , ma a due valori, con un minimo che aumenta al

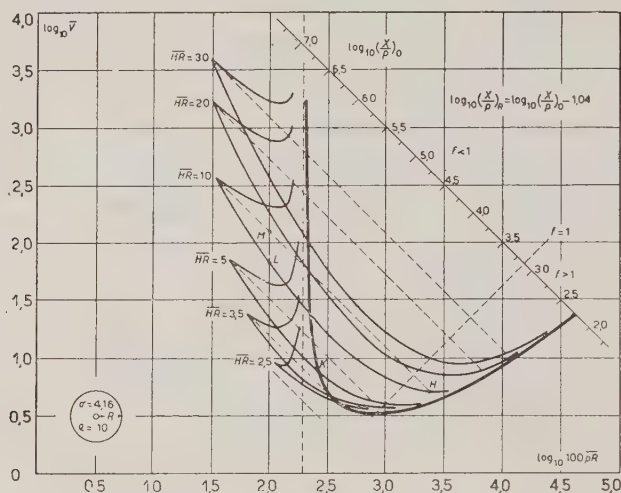


Fig. 8. - Curve di Paschen per elettrodi cilindrici ( $q = 10$ ) e vari campi magnetici trasversali.

diminuire di  $\bar{p}\bar{R}$ ; il secondo per  $2 < \bar{p}\bar{R} < 2[(1 + q)/\sigma] \exp [1/\sigma]$  in cui la tensione di scarica cala dapprima più o meno rapidamente col crescere di  $\bar{H}\bar{R}$ , per poi regolarmente aumentare; il terzo infine, per  $\bar{p}\bar{R} > 2[(1 + q)/\sigma] \exp [1/\sigma]$ , in cui la tensione di scarica cresce regolarmente fin da principio con  $\bar{H}\bar{R}$  e tanto più lentamente quanto maggiore è  $\bar{p}\bar{R}$  (veggansi le figg. 2e, f, g a pag. 183 di P.N.).

Nelle figg. 7 e 8 è anche riportata, parallelamente alle rette  $\eta=1$ , la scala logaritmica dei valori di  $X/p$  e in particolare di quelli massimi relativi alla superficie dell'elettrodo interno. Anche per il caso di elettrodi cilindrici, nel piano  $[\log_{10} 100 \bar{p}\bar{R}, \log_{10} \bar{V}]$  le linee di eguale  $X/p$  sono rette inclinate di  $45^\circ$  rispetto all'asse delle ascisse. Si ha infatti dalla (4)

$$\frac{X(r)}{q} = 2B \frac{\sigma \bar{V}}{p\bar{R}} \cdot \frac{1}{1 + q \frac{r}{\bar{R}}},$$

e quindi rispettivamente per la superficie del cilindro interno ( $r = 0$ ) e per



quella del cilindro esterno ( $r = R$ ):

$$\left(\frac{X}{p}\right)_0 = 2B\sigma \frac{\bar{V}}{pR}; \quad \left(\frac{X}{p}\right)_R = 2B\sigma \frac{\bar{V}}{pR} \cdot \frac{1}{1 + \varrho}$$

quindi:

$$\log_{10} \bar{V} = \left[ \log_{10} \left(\frac{X}{p}\right)_0 - \log_{10} 200B\sigma \right] + \log_{10} 100pR,$$

che è appunto l'equazione delle rette a costante  $(E/p)_0$ .

Le curve riportate nelle figg. 7 ed 8 bastano per dare un chiaro concetto del modo come dipendono l'una dall'altra, in base alla nostra teoria, le varie grandezze considerate. La vera e propria valutazione numerica di esse, che richiede, secondo le (1), l'intervento delle quantità  $U$ ,  $G$  ed  $S$  può essere fatta nelle parti più prossime al minimo di tensione, assumendo per  $\gamma$ , come si è già detto, un valore intermedio indipendente da  $X/p$ , usando cioè i valori indicati nella tabella I. Per una valutazione delle curve nelle parti più lontane dal minimo occorre tenere conto della variabilità di  $\gamma$  con  $X/p$  e a tale scopo è riportata appunto in ogni diagramma la scala logaritmica di  $X/p$  col valore massimo che questa quantità ha alla superficie dell'elettrodo interno. Per valori non troppo grandi di  $\varrho$ , la correzione con questo riferimento può bastare: essa fa difetto, invece quando  $\varrho$  sia grande, ossia, per es., per sistemi di elettrodi dimensionati come i contatori a filo. Di ciò diremo ancora al n. 5.

A dare un esempio degli effetti della correzione per la variabilità di  $\gamma$  può servire la Fig. 9 in cui sono riportate le curve di Paschen relative agli stessi casi della Fig. 8 ( $\varrho = 10$ ), tenendo conto della correzione per  $\gamma$ . Essendo  $f$  il fattore indicato nella fig. 1 in funzione di  $X/p$ , le quantità variabili considerate nella fig. 9 sono  $\bar{V} = f \cdot \bar{V}$ ,  $\bar{pR} = f \cdot pR$ ,  $\bar{RH} = f \cdot HR$ . Per il calcolo dei valori sono da usarsi quindi le stesse costanti  $U$ ,  $G$  ed  $S$  che sono indicate nella Tabella I. Dal confronto della fig. 9 con la fig. 8 si vede quindi che la correzione incide fortemente sui valori per  $\bar{pR}$  piccoli, ma lascia imperturbato l'andamento generale delle curve.

Per dare, in particolare, anche delle indicazioni quantitative, che, date le incertezze che gravano sulle varie costanti, non possono avere che il significato di dati d'orientamento, possiamo considerare un sistema di elettrodi cilindrici di raggio  $a = 0,25$  cm, quello interno, e  $a + R = 2,75$  cm, quello esterno; dunque  $R = 2,5$  cm,  $\varrho = 10$ . Per una pressione  $p = 1$  torr (aria) si trovano (punto  $H$  sulla curva 10 delle figg. 8 e 9) con un campo magnetico  $H = 296$  A/cm (372 Oe) le tensioni di scarica  $V = 600$  V e  $V = 660$  V rispettivamente senza e con la correzione per  $\gamma$ . Per la pressione più bassa  $p = 0,1$  torr (punto  $K$  delle due figure) si trova con un campo magnetico  $H = 148$  A/cm (186 Oe) una tensione di scarica che nei due casi è  $V = 960$  V e  $V = 756$  V.

Per  $p = 0,04$  torr (punto  $L$  delle due curve) l'influenza della correzione si fa molto grande. Con un campo magnetico  $H = 296$  A/cm (372 Oe), cioè con quello stesso del primo caso, risulta  $V = 7560$  V senza correzione, ma soltanto  $V = 2232$  con la correzione; la quantità  $X/p$  ha qui valori elevatissimi e  $\gamma$  s'avvicina e forse supera anche l'unità; che con una tale efficienza dell'effetto gamma la tensione di scarica risulti molto più bassa del prevedibile in base

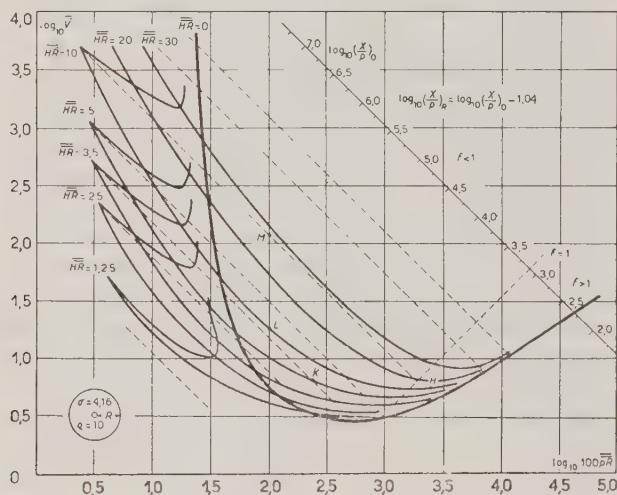


Fig. 9. — Curve di Paschen per elettrodi cilindrici ( $q = 10$ ) e vari campi magnetici, corrette tenendo conto della variabilità  $\gamma$ .

a un valore medio di  $\gamma$  è ovvio. Così pure l'ampiezza dell'intervallo d'incertezza per la polarità con anodo interno si fa molto grande (dal punto  $L$  al punto  $M$  delle due figure) e precisamente da 7560 V a 15120 V se non si tiene conto della correzione e da 2232 V a 13800 V, se si tiene conto di essa.

L'esperienza potrebbe quindi dare, in tali condizioni, utili elementi di informazione, oltre che sull'effetto gamma per valori elevati di  $X/p$ , anche sull'effetto di polarità che vi potrebbe provocare il campo magnetico.

## 5. — Il caso di $q$ molto grande.

Speciale attenzione merita il caso che  $q$  sia molto grande, perchè esso corrisponde, quando l'elettrodo esterno sia catodo, alla situazione che si ha nei contatori di G.-M. In realtà, per ciò che riguarda l'effetto relativo del campo magnetico trasversale, poco si modifica, quando  $q$  si faccia crescere forte-

mente, rispetto a ciò che si è trovato già per  $\varrho = 10$  (fig. 8); basta per farsene un'idea confrontare questa figura con la fig. 10 che si riferisce appunto a valori molto più elevati di  $\varrho$ . Ciò che è essenzialmente diverso nei due casi trae origine dalle modificazioni che subisce la curva di Paschen già in assenza di campo magnetico col crescere di  $\varrho$ , le quali conducono questa curva, man mano, attraverso lo spostamento del minimo verso destra e l'attenuarsi della pendenza

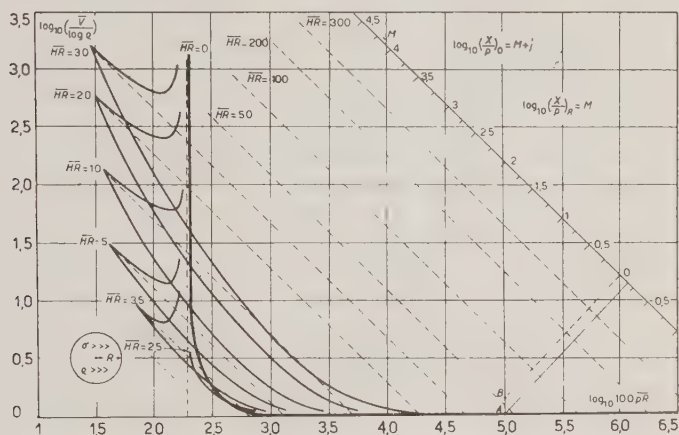


Fig. 10. - Curve di Paschen per elettrodi cilindrici ( $\varrho$  molto grande) e vari campi magnetici trasversali.

del ramo ascendente destro, ad adagiarsi, per  $\varrho \rightarrow \infty$ , asintoticamente sull'asse delle ascisse.

Per  $\varrho$  molto grande le (19a, b) si riducono infatti alle seguenti espressioni:

$$(20a) \quad \frac{\bar{V}}{\log \varrho} = \frac{1}{1 - \exp[-\xi]},$$

$$(20b) \quad pR = \frac{2\xi}{1 - \exp[-\xi]},$$

che ci danno l'equazione parametrica della curva di Paschen in campo magnetico nullo, con le proprietà anzidette.

Per la rappresentazione grafica conviene prendere questa volta come ordinata  $\bar{V}/\log \varrho$  o il suo logaritmo decimale  $\mathcal{L}$ , come in fig. 10; così si tiene conto implicitamente dell'aumento naturale e assai lento (logaritmico) che subiscono tutte le  $\bar{V}$  col crescere di  $\varrho$ . Per avere poi  $\log_{10} \bar{V}$  basta aggiungere al valore letto dell'ordinata  $\mathcal{L}$ , la quantità:

$$i = \log_{10}(\log 10) + \log_{10}(\log_{10} \varrho) = 0,3622 + \log_{10}(\log \varrho),$$

sicchè si ha

$$\log_{10} \bar{V} = \mathcal{L} + i,$$

avendo  $i$  i valori indicati nella tabella III.

TABELLA III. - Valori di  $\sigma$ ,  $i$  e  $j$  per grandi valori di  $\varrho$ .

$\varrho$	100	500	1000	10000
$\sigma$	22	81	145	1090
$i$	0,66	0,79	0,84	0,96
$j$	2,00	2,70	3,00	4,00

Passando alle curve per  $\overline{HR} \neq 0$  risulta, per  $\varrho$  molto grande, dalla (17)

$$(21) \quad \overline{HR} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot Q(k, \eta).$$

Le curve risolventi si mostrano cioè indipendenti da  $\varrho$ . Dalle (16a, b) si ha per il nostro caso

$$(22a) \quad \frac{\bar{V}}{\log \varrho} = \frac{Q(k, \eta)}{\xi} = \frac{Q(k, \eta)}{k\eta} = \frac{\overline{HR}}{2\sqrt{k \cdot \eta}},$$

$$(22b) \quad \overline{pR} = 2Q(k, \eta) = \sqrt{k} \cdot \overline{HR},$$

da calcolarsi con le coppie di valori  $k$  ed  $\eta$  ricavate dalle curve risolventi per  $\overline{HR}$  fissato. Anche le curve di Paschen per  $\overline{HR} \neq 0$  risultano quindi indipendenti da  $\varrho$ , salvo lo spostamento parallelo che esse subiscono verso valori di  $\bar{V}$  più elevati col crescere di  $\varrho$ , spostamento che, nella rappresentazione in fig. 10, è implicitamente compreso in virtù della sostituzione dell'ordinata  $\log_{10} \bar{V}$  con  $\mathcal{L}$ . La fig. 10 vale quindi per ogni  $\varrho$  maggiore, possiamo dire, di 100. Vi è riportata anche, come nelle precedenti analoghe figure, la scala logaritmica dei valori  $X/p$ , ma qui per comodità, i valori indicati sono quelli relativi alla superficie dell'elettrodo esterno. Si ha infatti

$$\left(\frac{X}{p}\right)_R = 2B \frac{\sigma}{1 + \sigma p \overline{H}} \frac{\bar{V}}{\overline{pR}} = 2B \frac{\bar{V} / \log \varrho}{\overline{pR}},$$

(l'ultima espressione essendo approssimata per  $\varrho$  molto grande); e quindi

$$M = \log_{10} \left(\frac{X}{p}\right)_R = \log_{10} 200B + \mathcal{L} - \log_{10} 100 \overline{pR},$$

mentre per la superficie dell'elettrodo interno si ha

$$\log_{10} \left( \frac{X}{p} \right)_0 = M + j,$$

essendo  $j = \log_{10} \varrho$  (Tabella III).

Possiamo, per es., considerare un dispositivo di elettrodi cilindrici delle dimensioni di quelli usati nei contatori G.-M. (diametro dell'elettrodo interno filiforme  $2a = 0,01$  cm, diametro del cilindro esterno  $(2a + R) = 5$  cm), quindi con  $R = 2,5$  cm,  $\varrho = 500$ . Per la pressione di 100 torr, si ha  $\overline{pR} = 250$  torrem. La tensione di scarica è in queste condizioni, nell'aria, senza campo magnetico, per entrambe le polarità, dell'ordine di grandezza di  $10^3$  V. Se poniamo dunque per ipotesi  $V = 1000$  V si ha  $(X/p)_0 = 326$  V/torrem,  $(X/p)_R = 0,65$  V/torrem, cioè  $\log_{10} (X/p)_0 = 2,5$ ,  $\log (X/p)_R = 0,2$ . In corrispondenza di quest'ultimo valore si trova nella fig. 10 il punto  $A$  cioè  $\log_{10} 10C\overline{pR} = 5$ , quindi  $\overline{pR} = 1000$ . Ne segue  $Gf = pR/\overline{pR} = 0,25$  e prendendo  $G = 0,1$  risulta  $f = 2,5$  ossia (fig. 1)  $\log_{10} 10^5 \gamma = 1,5$ ,  $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-4}$ . Questo  $\gamma$  corrisponde ai due valori  $\log_{10} X/p = 2,0$  e  $= 1,8$  rispettivamente dall'una e dall'altra parte del minimo di  $\gamma$ , valori che si verificano nel nostro caso ( $p = 100$  torr) alle distanze di circa 70 e di circa 130 liberi cammini medi elettronici dalla superficie del filo. Si potrebbe quindi pensare che il primo valore corrisponda alla polarità in cui è catodo il filo e prevale per  $\gamma$  l'azione degli ioni positivi, il secondo alla polarità inversa, quella che si ha nei contatori, nel quale caso prevale certamente l'azione dei fotoni. Ma ciò esula del resto dall'argomento specifico della presente nota; poichè qui interessa direttamente solo l'effetto del campo magnetico. Ora trattandosi, nel nostro esempio, di condizioni di scarica rappresentate dal punto  $A$  della fig. 10, si vede subito che solo per  $\overline{HR} > 50$  un simile effetto potrebbe manifestarsi e ciò anche esclusivamente per la polarità dei contatori, in quanto che la curva di Paschen relativa alla polarità normale (catodo interno), per  $\overline{HR} = 50$ , si adagia ancora troppo sull'asse delle ascisse. Un aumento della tensione di scarica per questa polarità lo si potrebbe rilevare solo per valori di  $\overline{HR}$  notevolmente maggiori.

Per il caso dei contatori, l'unico effetto possibile di un campo magnetico non eccessivamente grande, può essere quindi quello derivante dall'azione del campo magnetico in immediata prossimità del cilindro catodico, campo che come si è detto più volte è in grado, quando abbia raggiunto una certa intensità, dato il valore assai piccolo del campo elettrico in quel posto, di impedire, almeno nella fase iniziale della scarica, che gli elettroni abbandonino il catodo. Nel caso specifico, l'accensione in campo magnetico potrebbe essere certa soltanto nelle condizioni del punto  $B$  (fig. 10), limite superiore dell'intervallo d'incertezza. Tenendo anche conto della correzione per  $\gamma$  si trova come limite superiore della tensione di scarica  $V = 1300$  V con un campo magnetico di intensità  $H = 1900$  A/cm (2400 Oe). Come sempre, si tratta esclusiva-



mente di valori numerici puramente indicativi, tanto per illustrare un possibile effetto, sull'esistenza o non del quale potrà decidere soltanto l'esperienza.

Che nei tipi costruttivi normali di contatori a filo occorranco dei campi magnetici molto elevati per ottenere degli effetti sensibili, è del resto già a priori prevedibile e risulta anche da questa nota. Il funzionamento di un contatore come tale non dovrebbe essere anzi sensibilmente influenzato nemmeno da un campo trasversale di 8000 Oe, dato che P. BASSI, I. FILOSOFO e L. PRINZI<sup>(17)</sup> hanno trovato in un simile campo soltanto un notevole aumento percentuale del numero degli impulsi ritardati di 1  $\mu$ s, e una diminuzione della lunghezza efficace del contatore. Ad ogni modo nelle esperienze che ho ora in corso le condizioni di scarica, pur tenendo  $q$  molto grande, sono scelte in modo da poter ottenere presumibilmente anche con campi magnetici più deboli, degli effetti sensibili.

---

(17) P. BASSI, I. FILOSOFO e L. PRINZI: *Nuovo Cimento*, **7**, 83 (1950).

#### SUMMARY (\*)

The theory previously developed by the Author for the determination of the discharge potential between plane and parallel electrodes in a transversal magnetic field is extended to the case of coaxial cylindrical electrodes. For every particular geometry of the system of electrodes (characterised by the ratio  $q$  between interelectrode distance  $R$  and radius of the inner cylinder  $a$ ) and for each value of  $\overline{HR}$ , the corresponding curve of Paschen  $\overline{V} = F(\overline{pR})$  results defined,  $\overline{V}$ ,  $\overline{pR}$ ,  $\overline{HR}$  being standardized values, applying to every gas, of  $V$ ,  $pR$ ,  $HR$ , that is, respectively of the discharge potential, the product of the interelectrode distance  $R$  times the pressure  $p$  and the product of this distance times the intensity  $H$  of the magnetic field. When the dependance on  $X/p$  of the coefficient of the  $\gamma$  effect at the cathode is not considered and  $\gamma$  is given a constant intermediate value, the problem is, at least qualitatively, solved by these curves, which show, within certain limits, all four types of breakdown, already described in the particular case treated in the previous paper: ordinary far and near breakdown magnetic far and near breakdown. Considering however the dependence of  $\gamma$  on  $X/p$ , which is more diffusely discussed in n. 1, the curves are to be corrected, but this does not cause a perturbation of the general features of the phenomenon. So as they result from the theory, the curves of Paschen can be used without discrimination only in the cases in which the inner cylinder (or wire) is a cathode. For the inverse polarity, as in the G.-M. counters, a limit is drawn by the fact that the magnetic field, in reaching a certain value, may annul the  $\gamma$  effect at the cathode, where in this case the electric field  $X$  has his lowest value. This eventuality is discussed, while experiences are being performed to clear the matter.

---

(\*) Editor's translation.

## NOTE TECNICHE

### Fabrication et propriétés des compteurs de Geiger remplis à la vapeur de brome et destinés à la prospection $\beta$ et $\gamma$ .

C. GIMENEZ et J. LABEYRIE

*Commissariat à l'Énergie atomique, Division des Constructions Électriques  
Fontenay aux Roses, Seine, France.*

(ricevuto l'8 Gennaio 1952)

**Résumé.** — On décrit le mode de construction et quelques propriétés d'un type de compteur à rayons bêta et gamma, rempli d'un mélange neon-argon-brome. Les compteurs de ce type sont stables et robustes, fonctionnent à basse tension (350 V) et sont peu sensibles aux variations de température entre  $-70^{\circ}\text{C}$  et  $+125^{\circ}\text{C}$ .

#### Introduction.

Le modèle de compteur Geiger décrit ci-dessous est destiné à équiper des appareils portatifs pour la prospection par les rayons bêta et gamma.

Les qualités demandées à ce compteur sont les suivantes:

- 1) Tension de fonctionnement relativement faible (360 V).
- 2) Autocoupure.
- 3) Stabilité des caractéristiques pendant au moins 2 ans.
- 4) Fonctionnement correct dans un domaine de température allant de  $-30^{\circ}\text{C}$  à  $+50^{\circ}\text{C}$ , sans qu'il soit nécessaire de changer la tension de fonctionnement lorsque la température du compteur varie entre ces limites.

En 1947, LIEBSON [5] puis LIEBSON et FRIEDMAN [5] ont publié les propriétés essentielles que donne aux compteurs de Geiger un nouveau mélange de remplissage composé de néon, avec des traces d'argon et chlore ou de brome. Ces propriétés essentielles étant précisément celles qui viennent d'être définies, nous avons décidé de construire des compteurs remplis avec un mélange voisin de celui de LIEBSON et FRIEDMAN.

## 1. - Construction des compteurs.

a) *Structure des compteurs.* - La forme de ce compteur est très classique: une enveloppe cylindrique de verre contient une cathode cylindrique en métal et un fil anodique. Sur la fig. 1 nous indiquons la structure et les dimensions principales du compteur; toutes les propriétés décrites dans cet article sont relatives à ce modèle.

La partie centrale de l'enveloppe de verre a été amincie par soufflage sur une surface de l'ordre de  $60 \text{ cm}^2$ . On obtient ainsi, sur les compteurs de série, une épaisseur de l'ordre de  $0,25 \text{ mm}$ , soit  $50 \text{ mg/cm}^2$  environ.

La cathode est indifféremment un grillage ou une spirale, cette structure ajourée ayant le triple avantage d'accroître le rendement pour le comptage des rayons gamma, d'accroître la transparence pour les rayons bêta et par

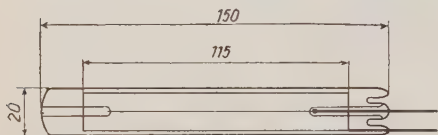


Fig. 1.

conséquent le rendement dans leur comptage et, enfin, de diminuer la surface de métal en contact avec le gaz de remplissage du compteur. Les transparences géométriques des cathodes sont de l'ordre de  $40\%$  dans le cas du grillage et de l'ordre de  $80\%$  dans le cas de la spirale.

Le diamètre de l'anode n'est pas critique. La tension de fonc-

tionnement la plus basse, pour un mélange déterminé, est obtenue pour un diamètre de l'ordre de  $0,2 \text{ mm}$ .

La construction est toute en verre et métal. Pour faciliter l'utilisation de ce compteur, le queue-sot de pompage et les sorties d'électrode sont groupées à une des extrémités, et ne font pas saillie en dehors de la section principale du compteur.

On trouvera en annexe quelques détails sur le choix des matériaux rentrant dans la construction de ces compteurs.

Les matériaux choisis sont:

- pour l'enveloppe: Verre « B.40 », <sup>(1)</sup> « Moly » <sup>(2)</sup> ou « Novo » <sup>(3)</sup>.
- pour la cathode: grillage de Fer pur Armco, ou spirale en « Dilver O » <sup>(4)</sup>.
- pour l'anode: Tungstène, Molybdène, « Dilver P » <sup>(4)</sup> ou « Dilver O ».
- pour les passages: —  $d^0$  —.

D'une façon générale, toutes les pièces métalliques du compteur sont chauffées en atmosphère d'hydrogène à  $900^\circ\text{C}$  pendant une heure, juste avant le montage dans l'enveloppe en verre. Cette opération a le double but de nettoyer parfaitement les pièces et de prévenir la formation de bulles à l'endroit des scelllements dans le verre.

<sup>(1)</sup> Fournisseur: Pyrex.

<sup>(2)</sup> Fournisseur: Verreries de Bagneaux.

<sup>(3)</sup> Fournisseur: Cristalleries de Choisy-le-Roi.

<sup>(4)</sup> Fournisseur: Acières d'Imphy.

b) *Mélange de remplissage.* — Le mélange ternaire ci-dessous, déterminé empiriquement, donne des résultats corrects. Il est très voisin des mélanges utilisés par LIEBSON et FRIEDMAN [5] et FRANKLIN et LOOSEMORE [8]. Il se compose de :

Néon . . . . .	250	( $\pm 10$ )	mm Hg
Argon . . . . .	2	( $\pm 0,05$ )	mm Hg
Brome . . . . .	0,8	( $\pm 0,05$ )	mm Hg.

On trouvera en annexe quelques considérations théoriques sur les mélanges de ce type.

Les gaz rares sont « spectroscopiquement purs » ; le brome a été débarassé par l'eau de son acide bromhydrique, et ensuite de l'eau par décantation, suivie d'une agitation de quelques minutes avec de l'acide sulfurique. Il est ensuite mis en ampoule de 20 cm<sup>3</sup> environ, contenant environ 1 cm<sup>3</sup> d'anhydride phosphorique. Il est débarrassé de l'air dissout par pompage vers  $-70^{\circ}\text{C}$ . Ce dégazage se fait sur le banc de pompage et remplissage des compteurs : La quantité de brome contenue dans l'ampoule de 20 cm<sup>3</sup> est de 4 cm<sup>3</sup> environ. L'ampoule, sur le banc, une fois sa pointe brisée, est constamment maintenue entourée du mélange acétone-neige carbonique. Ce récipient est isolé du banc par un robinet lubrifié à la graisse silicone. Une garde en verre empêche le ruissellement dans le brome des produits d'attaque de la graisse par la vapeur de brome <sup>(5)</sup>.

Les pressions partielles des différents gaz sont mesurées à l'aide d'une jauge d'ionisation spéciale [9] sans filament où l'ionisation est créée par des rayons alpha issus d'une petite source de polonium de quelques microcuries. On peut mesurer, par ce moyen, les pressions de brome et d'argon au voisinage de 0,1 mm avec une précision de l'ordre de 5%. La pression du néon, beaucoup plus considérable, se mesure simplement avec un manomètre à mercure, la surface du mercure étant protégée de l'attaque du brome par quelques centimètres d'huile de silicone. La vapeur de brome se dissout lentement dans l'huile et va attaquer le mercure sous-jacent. Cependant, l'attaque est suffisamment lente pour que l'on puisse utiliser le même manomètre pendant plusieurs semaines.

Le banc de pompage est en pyrex, on peut y monter une dizaine de compteurs simultanément. Le pompage se fait avec une pompe à palette suivie d'une pompe à vapeur de mercure, protégée de l'attaque du brome par un piège refroidi par l'azote liquide. Le piège doit être démontable pour pouvoir être nettoyé périodiquement du brome et du bromure de mercure qui s'y sont déposés.

Les divers robinets du banc sont graissés à la graisse à vide silicone. L'expérience montre que l'absorption du brome dans ces graisses est suffisamment lente pour ne pas gêner les mesures nécessaires au remplissage. Un regraissage général des divers robinets toutes les deux semaines est suffisant.

c) *Technique de montage et de remplissage.* — Les cathodes sont, avant montage, dégraissées au trichloroéthylène, puis partiellement dégazées en atmo-

(5) Pour la fabrication de série, il semble avantageux d'utiliser des ampoules à pointe en verre, dosées au préalable, contenant juste la quantité de brome nécessaire à un remplissage. On évite ainsi la mesure de la pression de brome.

sphère d'hydrogène à 900 °C pendant une heure. Elles sont ensuite scellées sur l'enveloppe en verre. Avant le montage sur le banc, les compteurs sont lavés à l'alcool éthylique à 95°. Une fois sur le banc ils sont pompés pendant quarante-huit heures avec deux dégazages de 2 à 3 heures à une température de 280 à 300 °C.

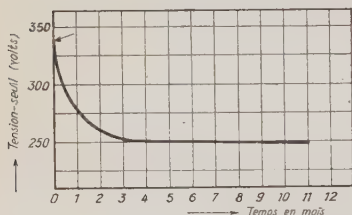


Fig. 2. — Évolution moyenne au cours du temps de la tension-seuil des compteurs à vapeur de brome. Cette évolution est due à l'absorption de brome par les parois du compteur. Cathode: Fer Armco; Enveloppe: Mo; Passages: Dilver P; Anode: Mo. Le point marqué d'une flèche est la valeur de la tension-seuil aussitôt après le scellement.

Après refroidissement à la température ambiante, on envoie du brome sous une pression de 5 à 10 mm Hg pendant une heure, pour saturer les graisses du banc et pour accélérer la formation des couches protectrices dans le compteur. Enfin, on repompe pendant une heure, à la température ambiante. Les compteurs sont alors prêts à recevoir le remplissage définitif avec le mélange cité plus haut. Ils sont scellés une heure après le remplissage.

Nous donnons fig. 2 l'évolution moyenne au cours du temps de la tension-seuil<sup>(6)</sup> des compteurs ainsi constitués.

On voit qu'après une évolution rapide, due à la formation de la couche protectrice et qui est pratiquement terminée en un mois, la variation ne se fait plus ensuite que très lentement: en moyenne la tension-seuil varie de 20 V les 10 premiers jours et de 10 V dans les 20 jours suivants; la variation n'est plus que de l'ordre de 5 V le mois suivant. Ces variations de seuil sont dues à une diminution de la pression de brome qui est d'environ 0,2 mm Hg dans le premier mois; c'est l'absorption par les parois d'environ  $100 \cdot 10^{-6}$  g de brome<sup>(7)</sup> qui provoque cette diminution.

## 2. — Caractéristiques.

Ces caractéristiques ont été relevées plusieurs mois après le scellement sur des compteurs fabriqués en petite série.

Les essais qui suivent ont été faits avec une échelle standard C.E.A. ayant un pouvoir de résolution de l'ordre de 10  $\mu$ s.

Pour une capacité parasite anode-cathode donnée, la longueur et la pente du palier dépendent beaucoup de la résistance d'anode. Ainsi avec 10 pF et

<sup>(6)</sup> Définie ainsi: Tension minima pour laquelle les impulsions ont la même amplitude (taux de comptage: environ 10 par seconde).

<sup>(7)</sup> Cette faible quantité correspond probablement à la formation sur ces parois d'une couche de bromure de fer et de bromures alcalins, dont l'épaisseur moyenne est de l'ordre de  $10^{-6}$  mm. Cette couche protectrice qui n'a, par conséquent, que quelques molécules d'épaisseur, est suffisante pour empêcher l'attaque ultérieure par le brome.



$10^8 \Omega$  on atteint aisément 300 V de palier, avec une pente moyenne de 2% pour 100 V de palier (fig. 3).

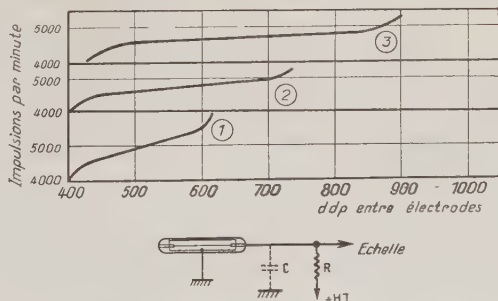


Fig. 3. Variation de la longueur ( $l$ ) et de la pente ( $p$ ) du palier pour différentes valeurs de la résistance d'anode  $R$ . ( $C = 10 \text{ pF}$ , temps de résolution de l'échelle:  $10 \mu\text{s}$ ).

- (1)  $R = 5 \cdot 10^6 \Omega$ ,  $l = 180 \text{ V}$ ,  $p = 10\%$  pour 100 V,  
 (2)  $R = 5 \cdot 10^7 \Omega$ ,  $l = 260 \text{ V}$ ,  $p = 4\%$  pour 100 V,  
 (3)  $R = 10^8 \Omega$ ,  $l = 340 \text{ V}$ ,  $p = 2\%$  pour 100 V.

Avec le circuit habituel <sup>(8)</sup> ( $C = 10 \text{ pF}$  et  $R = 5 \cdot 10^6 \Omega$ ) et à  $20^\circ\text{C}$ , la longueur des paliers normaux est comprise entre 80 et 180 V <sup>(9)</sup>, la pente relative est comprise entre 2% et 10% pour 100 V, le seuil est compris entre

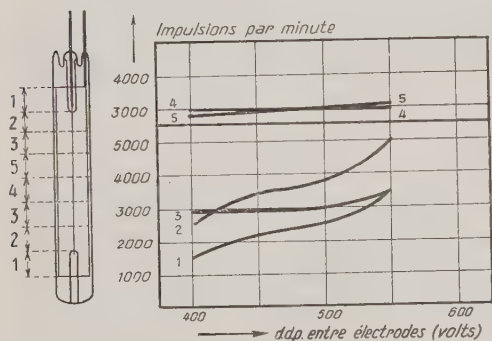


Fig. 4. - Variation de la pente et de la longueur du palier des différentes régions du compteur. Le compteur est divisé en 8 régions de 14,5 mm chacune.

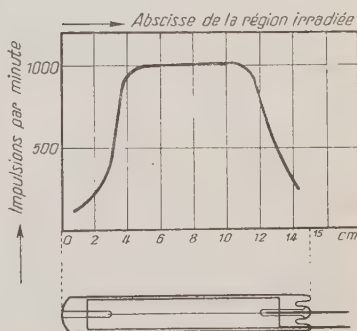


Fig. 5. - Variation relative du rendement pour la détection des rayons gamma de différentes régions du compteur, largeur du faisceau parallèle: 10 mm.

<sup>(8)</sup> Nous appellerons « palier normal » le palier obtenu dans ces conditions ( $C = 10 \text{ pF}$ ,  $R = 5 \cdot 10^6 \Omega$ ).

<sup>(9)</sup> En source diffuse (bêta + gamma de la pechblende).

300 et 350 V. En augmentant la proportion de brome dans le mélange, on accroît la valeur de la tension-seuil, et on augmente notablement la longueur du palier normal. Ainsi, avec un seuil à 400 V, le palier a une longueur de l'ordre de 150 V.

En irradiant séparément par un faisceau de rayons gamma parallèles des sections de compteur de 1 cm de long environ, on a mesuré les différentes pentes du palier normal pour les différentes sections du compteur (fig. 4).

Les variations des caractéristiques que l'on observe d'une section à l'autre sont semblables à celles que l'on observe pour des compteurs de mêmes dimensions remplis du mélange argon-alcool.

Le mouvement propre sous 5 cm de plomb est de 20 à 30 coups par minute. Le rendement pour les rayons cosmiques et pour les rayons gamma du  $\text{Co}_{60}$  est le même que celui d'un compteur en duralumin de 0,5 mm de paroi, ayant les mêmes dimensions géométriques, rempli du mélange classique argon-alcool.

On a mesuré les rendements relatifs des différentes sections du compteur avec un faisceau parallèle de rayons gamma du  $\text{Co}_{60}$  (fig. 5). Le rendement maximum, qui a lieu dans la partie centrale, est d'environ 1,5% en valeur absolue.

Dans ce cas encore, les rendements relatifs varient d'une section à l'autre de la même façon que dans les compteurs remplis du mélange classique argon-alcool.

### 3. — Stabilité.

Ces caractéristiques sont très stables dans le temps. Des compteurs ayant plus d'un an n'ont pratiquement pas varié durant cette période.

D'autre part, ainsi que LIEBSON [5] l'a montré, semble-t-il, le premier, ces compteurs sont étonnamment stables vis-à-vis des décharges: en les alimentant à une tension très supérieure à leur tension normale de fonctionnement avec une source de tension à faible impédance, on peut leur faire débiter des courants de l'ordre de 100  $\mu\text{A}$ . Dans ces conditions, le compteur s'illumine en émettant la lueur caractéristique du néon.

En alimentant ensuite le compteur avec sa tension de fonctionnement correcte, il retrouve aussitôt ses caractéristiques normales: même mouvement propre, même seuil, même pente et même rendement (aux erreurs de mesure près).

Il en est de même si la tension exagérée a été appliquée à l'envers, c'est-à-dire avec le pôle négatif sur le fil central. (Des manœuvres de ce genre sont en général fatales aux compteurs remplis avec les mélanges classiques).

### 4. — Effets de température.

D'une façon générale, ces compteurs sont beaucoup moins sensibles aux effets de température que les compteurs remplis avec des mélanges classiques.

Les mesures que nous avons faites à ce sujet sont en accord avec les résultats déjà publiés par LIEBSON [7], FRANKLIN et LOOSEMORE [8], YARWOOD et LE CROISSETTE [10]:

1) Ces compteurs fonctionnent de façon satisfaisante lorsque leur température varie dans un très large domaine: Lorsqu'on la fait varier de  $-70^{\circ}\text{C}$  à  $125^{\circ}\text{C}$ , on constate que la longueur du palier augmente, la longueur moyenne passe de 100 V pour  $-70^{\circ}$  à 200 V pour  $125^{\circ}$ . La pente du palier double environ de  $-70^{\circ}$  à  $+125^{\circ}$  (fig. 6).

En annexe nous avons indiqué les pressions de vapeur saturante du brome et du chlore à diverses températures. Si l'on admet que la pression limite d'halogène à laquelle l'autocoupure se fait encore est comprise entre 0,02 et 0,1 mm Hg, nous en déduisons que les températures inférieures limites que l'on peut atteindre sont comprises entre  $-70^{\circ}\text{C}$  et  $-80^{\circ}\text{C}$  dans le cas du brome et entre  $-130^{\circ}\text{C}$  et  $-140^{\circ}\text{C}$  dans le cas du chlore (les compteurs à vapeur organique ne peuvent guère descendre en-dessous de  $-25^{\circ}\text{C}$ ).

De  $-70^{\circ}\text{C}$  à  $-30^{\circ}\text{C}$ , la variation de tension-seuil est d'environ 0,5 V par degré centigrade.

De  $-30^{\circ}\text{C}$  à  $+30^{\circ}\text{C}$  elle est d'environ 0,4 V par degré, au-delà de  $+30^{\circ}\text{C}$  cette variation devient un peu plus forte, pour atteindre 0,6 V environ par degré aux environs de  $100^{\circ}\text{C}$  (fig. 6).

Dans les compteurs à vapeur organique, la variation est plus forte (elle est de 1 V par degré au moins).

Le faible coefficient de température des compteurs à halogène rend ces compteurs très intéressants pour les appareils dans lesquels on ne peut modifier aisément la tension d'alimentation du compteur (appareils de prospection portatifs par exemple).

## 5. — Forme de l'impulsion.

*a) Amplitude.* — Dans ce type de compteur, contrairement à ce qui se passe dans le cas des compteurs contenant des vapeurs organiques, il n'y a pas de région de comptage proportionnel: l'amplitude passe brusquement d'une valeur très faible à une valeur de plusieurs volts lorsqu'on traverse la tension-seuil.

Une fois franchie la tension-seuil, les amplitudes croissent d'une façon régulière avec la tension (fig. 7).

D'une façon générale les amplitudes sont plus grandes, à surtension <sup>(10)</sup> relative égale, que dans le cas des compteurs de mêmes dimensions remplis du mélange classique argon-alcool (les circuits électroniques étant les mêmes dans les deux cas). L'amplitude de l'impulsion, pour une surtension de 50 V

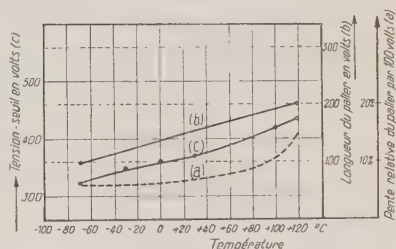


Fig. 6. — Variation des caractéristiques: pente (a), longueur du palier (b), tension-seuil (c) d'un compteur type en fonction de la température entre  $-70^{\circ}\text{C}$  et  $+125^{\circ}\text{C}$ .

<sup>(10)</sup> La surtension est la différence entre la valeur de la tension de fonctionnement et celle de la tension-seuil.

est de l'ordre de 15 V, lorsque la capacité parasite totale est de l'ordre de 50 pF et la résistance d'alimentation de l'ordre de  $10^6 \Omega$ . Si l'on fait fonctionner le compteur avec de très fortes surtensions, l'amplitude peut devenir énorme.

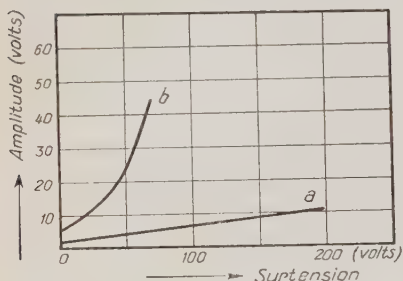


Fig. 7. — Variation de l'amplitude des impulsions en fonction de la tension appliquée au compteur: a) compteur argon-alcool; b) compteur néon-argon-brome. Les deux compteurs ont les mêmes dimensions et fonctionnent sur un même circuit.

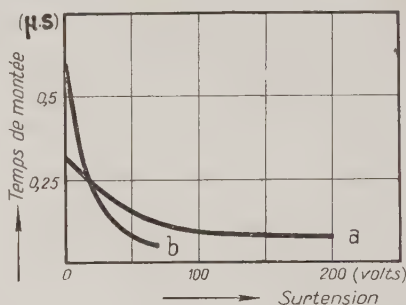


Fig. 8. — Variation du temps de montée des impulsions en fonction de la surtension: a) compteur rempli du mélange argon-alcool classique; b) compteur rempli du mélange néon-argon-brome. Observation des impulsions à l'oscillographe déclenché (bande passante: 7 MHz/s). Capacité parasite: 50 pF, résistance série:  $10^6 \Omega$ .

Ainsi, à 400 V de surtension l'amplitude est de l'ordre de 200 V (la résistance d'alimentation doit être portée à  $10^7 \Omega$  pour éviter les décharges dans le compteur).

La structure des impulsions varie avec la surtension comme dans le cas des compteurs à mélange d'argon et d'alcool: A une surtension de 50 V environ, les premières impulsions multiples commencent à apparaître. L'écart moyen entre deux pics successifs d'une impulsion multiple varie peu avec la surtension, il est de l'ordre de  $250 \cdot 10^{-6}$  s<sup>(11)</sup>. Cette multiplicité des impulsions ne gêne d'ailleurs nullement pour leur comptage, à condition que l'appareil de numération soit rendu insensible après l'arrivée du premier pic, pendant une durée au moins égale à la durée totale de l'impulsion. Les plus longues impulsions, qui comportent une quinzaine de pics, et qui se produisent à une tension juste inférieure à celle qui produit la décharge continue, ont une durée totale de l'ordre de  $7 \cdot 10^{-4}$  s.

b) *Temps de montée* <sup>(12)</sup>. — Il décroît très rapidement lorsque la surtension augmente. Il est plus court en fin de palier normal que dans les compteurs de mêmes dimensions à mélange argon-alcool.

Sur la fig. 8 on a indiqué quelques temps de montée en fonction de la sur-

<sup>(11)</sup> E. PICARD (communication privée).

<sup>(12)</sup> Temps nécessaire pour que l'amplitude augmente de 1 V dans la partie linéaire du front de l'impulsion.

tension pour un compteur à halogène et un compteur rempli du mélange classique argon et alcool. Ce temps de montée pour le compteur à halogène est inférieur à  $0,1 \mu s$  par volt lorsque la surtension est supérieure à 50 V.

c) *Temps mort.* — Le temps mort, évalué par la méthode de la décroissance d'iode 128, est de l'ordre de  $100 \mu s$ , pour une surtension de 50 V <sup>(13)</sup>.

d) *Quantité d'électricité débitée à chaque impulsion.* — La mesure des quantités d'électricité débitées par les compteurs a été faite avec le montage décrit en annexe. On a ainsi observé les particularités suivantes:

1) La quantité  $q$  d'électricité débitée à chaque impulsion varie nota-

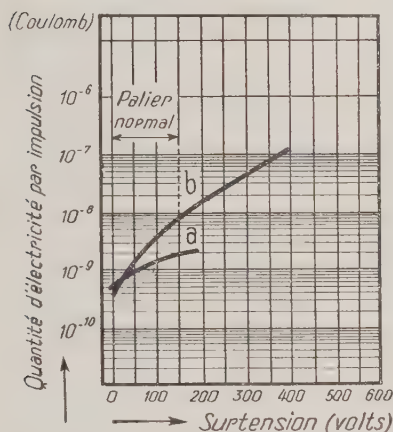


Fig. 9. — Variation de la quantité d'électricité débitée à chaque impulsion en fonction de la tension pour un compteur à halogène (b) et pour un compteur argon-alcool de mêmes dimensions (a).

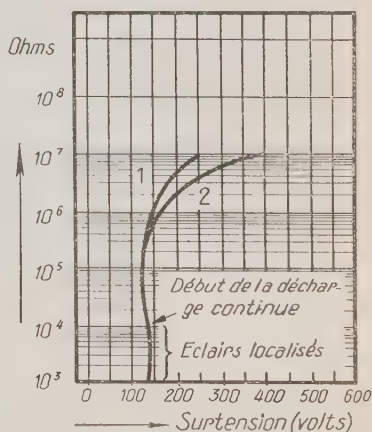


Fig. 10. — Tension d'amorçage (2) et de désamorçage (1) de la décharge continue en fonction de la résistance d'anode  $R$ .

blement avec la tension appliquée au compteur: du début à la fin du palier normal elle varie de  $5 \cdot 10^{-10}$  à  $4 \cdot 10^{-9}$  C environ.

Cette quantité est plus importante en fin de palier que dans le cas des compteurs de mêmes dimensions remplis du mélange argon-alcool habituel: du début à la fin du palier normal, pour les mélanges de ce type, les quantités  $q$  ne varient que de  $4,6 \cdot 10^{-10}$  à  $1,8 \cdot 10^{-9}$  C.

2) Si l'on fait croître la tension au-delà du palier, la valeur de  $q$  continue à croître régulièrement, en doublant approximativement tous les 60 V; on arrive ainsi vers 800 V, à des quantités qui sont de l'ordre de  $10^{-7}$  C.

<sup>(13)</sup> Mesuré par une méthode de coïncidences retardées il est de l'ordre de  $200 \mu s$  et reste à peu près constant tout le long du palier (E. PICARD, communication privée). Ce désaccord est peut être dû au fait que le taux de comptage est beaucoup plus lent dans la méthode de coïncidence retardée.



Il convient de ne pas oublier qu'il n'y a aucun inconvénient pour le compteur à halogène à débiter d'aussi grandes quantités d'électricité, ce qui n'est évidemment pas le cas pour les compteurs contenant les mélanges classiques du genre argon-alcool.

Ces quantités d'électricité sont suffisantes pour alimenter directement un microampèremètre; sans qu'il y ait besoin d'aucune amplification on peut ainsi détecter le passage de particules ionisantes individuellement.

3) Si on applique au compteur une tension supérieure à une certaine valeur il se met en décharge permanente. La valeur de la tension pour laquelle

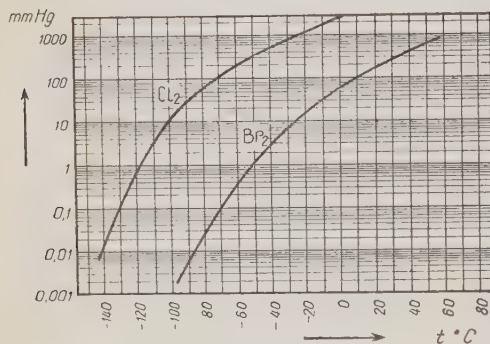


Fig. 11.

cette décharge s'amorce dépend de la résistance qui est en série avec le compteur: de  $10^4 \Omega$  à  $10^6 \Omega$ , la décharge s'amorce à 125 V environ au-dessus de la tension-seuil. Au-delà de  $10^7 \Omega$ , la tension disruptive croît régulièrement avec la valeur de la résistance: pour  $10^7 \Omega$ , elle se produit à 400 V environ au-dessus de la tension-seuil.

Si, lorsque la décharge est amorcée, on abaisse la tension au-dessous de la valeur d'amorçage, la décharge continue encore. L'écart entre les tensions d'amorçage et de désamorçage est de quelques volts lorsque la résistance série est inférieure à  $10^6 \Omega$ . Il croît ensuite, pour atteindre 150 V environ pour  $10 \text{ M}\Omega$  (fig. 10).

Le courant produit à l'amorçage de la décharge est pratiquement indépendant de la résistance série, et par conséquent, de la tension à laquelle la décharge s'amorce. Ce courant est de l'ordre de  $20 \mu\text{A}$ . En décharge le compteur a donc une résistance apparente de  $3 \cdot 10^7 \Omega$  environ.

4) Pour une tension déterminée, les quantités d'électricité  $q$  débitées à chaque impulsion ne dépendent pas de la valeur de la résistance série.

Lorsque celle-ci varie de  $10^5$  à  $10^7 \Omega$ ,  $q$  reste constante (à condition de ne pas entrer dans le domaine de tension où se produit la décharge).

5) Pour une tension déterminée, les quantités  $q$  débitées à chaque impulsion ne dépendent pas du taux de comptage: les mesures ont été faites à des taux moyens variant de 5 à 300 impulsions par seconde sans qu'il y ait de variation de  $q$ .

## 6. - Vie du compteur.

Ces compteurs peuvent débiter sans dommages des courants de l'ordre de  $20 \mu\text{A}$  pendant plusieurs heures, ce qui représente un débit total d'électricité qui est de l'ordre du coulomb. La quantité d'électricité débitée par impulsion étant de l'ordre de  $10^{-9} \text{ C}$  dans les conditions habituelles du fonctionnement (50 V au-dessus de la tension-seuil) on peut en conclure, dans la mesure

où le mélange s'use proportionnellement au courant qui le traverse, que la vie du compteur est au minimum de  $10^9$  impulsions.

En faisant fonctionner le compteur à plusieurs centaines de volts au-dessus de sa tension normale de fonctionnement, chaque impulsion débitant alors environ  $10^{-7}$  C, sa vie est encore, au minimum, de  $10^7$  impulsions.

D'autre part, si le compteur a été dégazé correctement, il semble qu'on puisse le conserver, au repos, pendant plusieurs années <sup>(14)</sup> sans qu'il y ait de modification appréciable de ses caractéristiques.

## A N N E X E

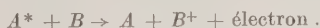
### 1. — Résumé des phénomènes se produisant lors des décharges des compteurs à halogène.

a) Les mélanges utilisés dans les compteurs à « halogène » peuvent être classés dans les « mélanges de Penning » [1]. Dans ces mélanges une faible quantité d'un gaz, à potentiel d'ionisation convenablement choisi, sert à empêcher la persistance d'états métastables d'excitation dans le gaz principal.

Le résultat le plus frappant de cette addition est un abaissement considérable de la tension disruptive par rapport à la valeur qu'elle avait dans le gaz principal.

Ces mélanges sont souvent utilisés dans les lampes stabilisatrices de tension ou dans les lampes à fluorescence. Dans ces lampes, le gaz principal est en général du néon, et le gaz ajouté en faible quantité est ordinairement de l'argon, mais peut également être un tout autre gaz, du mercure par exemple.

Les atomes métastables ( $A^*$ ) sont désexcités à la suite de chocs de seconde espèce avec les atomes du gaz ajouté ( $B$ ) suivant le schéma:



On voit que pour un atome désexcité, il y a formation d'un ion positif et d'un électron.

Dans un compteur de Geiger, qu'il soit à vapeur organique ou à halogéné, le gaz principal est en règle générale un gaz rare, ayant une grande tendance à former des atomes métastables. Ces derniers sont gênants pour deux raisons:

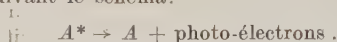
1) En stockant sous une forme stérile l'énergie prise par les électrons dans le champ du compteur, ils élèvent très notablement la valeur minima que le champ doit avoir pour que la décharge se produise.

Si les atomes métastables sont désexcités, on remet en circuit les électrons correspondants et l'avalanche peut s'établir pour un champ beaucoup plus faible. Ainsi, les compteurs du modèle décrit dans cet article donnent des décharges de Geiger (suivies aussitôt d'une décharge continue) à partir de 750 V s'ils sont remplis de néon pur sous une pression de 20 cm Hg. Si on ajoute à ce gaz une trace d'argon sous une pression de 0,1 mm Hg, elle suffira à détruire les atomes du néon métastables et les décharges de Geiger se produiront vers 150 V.

2) Après une décharge, les atomes métastables diffusent vers la paroi du compteur et, une fois arrivés dans son voisinage, risquent de donner naissance à des photo-

<sup>(14)</sup> Les compteurs ont déjà été suivis pendant un an environ.

électrons secondaires suivant le schéma:



La probabilité d'une telle réaction est très grande.

Le photo-électron arraché à la paroi est attiré par le fil et redéclenche une avalanche dans son voisinage.

Il est alors pratiquement impossible de faire fonctionner le compteur, à moins d'abaisser par un dispositif électronique la tension entre les électrodes du compteur pendant un temps relativement très long (ce temps peut avoir une durée de l'ordre de 0,1 s), à cause de la très longue durée de l'état métastable.

Dans les compteurs remplis avec le mélange classique argon-alcool, c'est l'alcool qui détruit les atomes métastables d'argon <sup>(15)</sup>.

Dans les compteurs contenant un halogène, l'halogène peut jouer le même rôle, mais on préfère ajouter au gaz principal, qui est en général du néon, et en plus de l'halogène, une petite quantité d'argon, qui est plus efficace pour détruire les états métastables du néon.

b) Le principal rôle de l'halogène que l'on introduit dans un mélange pour compteur de Geiger est d'être une vapeur « de coupure ». PRESENT [6] semble être le premier à avoir attiré l'attention sur cette propriété des halogènes. Le mécanisme de cette action peut se résumer ainsi:

Les ions de gaz rare ( $a^+$ ) après leur naissance dans l'avalanche qui entoure l'anode se dirigent vers la cathode. Dans ce voyage, ils cèdent leur charge aux molécules d'halogène ( $b_2$ ) par choc de seconde espèce suivant le schéma:



La seule condition pour que l'échange soit possible est que le potentiel d'ionisation de ( $a$ ) soit supérieur à celui de ( $b_2$ ). Malgré la faible proportion d'halogène présente dans le mélange, le nombre de chocs que peut subir l'ion  $a^+$  dans son voyage entre l'anode et la cathode est suffisamment grand (de l'ordre de  $10^3$ ) ainsi que la probabilité d'échange pour qu'il n'y ait pratiquement plus que des ions d'halogène qui arrivent au contact de la paroi cathodique. Les ions d'halogène se neutralisent alors avec un électron arraché à la paroi; l'énergie libérée à ce moment est utilisée en un temps très court pour dissocier en deux atomes la molécule neutre qui vient d'être formée. Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans le cas des ions de gaz rare, il n'y a pas émission d'un photon énergétique lors de la neutralisation. Par conséquent, il n'y a pas émission de photoélectron par la paroi, ce qui risquerait de provoquer une nouvelle avalanche dans le compteur.

Les molécules d'halogène jouent donc exactement le même rôle que les molécules de vapeurs organiques dans les mélanges classiques.

Cependant, à la différence des molécules de vapeurs organiques, les molécules de brome ont une grande probabilité de se reconstituer après leur dissociation, de sorte que le mélange gazeux ne s'use pas. Il est probable que cette reconstitution des molécules de brome ne se fait complètement qu'en plusieurs étapes, avec émission de plusieurs photons de faible énergie, incapables d'extraire des photo-électrons de la paroi.

Par ailleurs, la quantité d'halogène nécessaire à l'extinction correcte de la décharge est très faible: une proportion d'halogène dans le gaz rare inférieure à un pour mille est très suffisante.

<sup>(15)</sup> La quantité d'alcool étant considérable (de l'ordre de 10 mm Hg) la tension seuil est élevée. Avec une très faible quantité d'alcool, la tension-seuil peut être très basse [2].

Cette circonstance est très heureuse, car l'utilisation d'halogène sous une pression partielle importante conduirait à la formation d'ions négatifs par attachement d'électrons.

La présence de ces ions négatifs, qui ont une faible mobilité par rapport à celle des électrons, entraînerait les deux inconvénients suivants:

1) augmentation du « temps de latence », entre le passage de la particule ionisante et le développement de l'avalanche [6];

2) diminution du rendement du compteur [8].

Avec des pressions partielles d'halogène inférieures à 1 mm Hg, ces inconvénients ne sont pas notables.

En outre, grâce à la faible quantité de brome présente, la tension-seuil reste faible.

c) *Choix des éléments du mélange.* Nous avons porté sur le tableau I les potentiels d'ionisation des halogènes et des gaz rares, et les potentiels d'excitation métastable de ces derniers. D'après ce que l'on a dit ci-dessus on voit que l'on peut obtenir de nombreux mélanges doués de la qualité d'autocoupure, tels que ceux formés d'hélium avec l'un des quatre halogènes, ceux formés de néon, avec le chlore, le brome ou l'iode et ceux d'argon ou krypton avec l'iode. Cependant, l'iode ne semble guère convenir, car il a une faible probabilité de dissociation au voisinage de la paroi cathodique [6]. D'autre part, on choisit en général le brome, moins corrosif que le fluor et le chlore.

TABLEAU I.

Gaz	1 <sup>er</sup> potentiel d'ionisation	1 <sup>er</sup> potentiel métastable	Numéro atomique
Helium . . . . .	24,46	19,77	2
Néon . . . . .	21,47	16,6	10
Argon . . . . .	15,68	11,6	18
Krypton . . . . .	13,93	9,98	36
Xénon . . . . .	12,08	8,39	45
Fluor F <sub>2</sub> . . . . .	17,8	—	9
Chlore Cl <sub>2</sub> . . . . .	13,2	—	17
Brome Br <sub>2</sub> . . . . .	12,8	—	35
Iode I <sub>2</sub> . . . . .	9,7	—	53

## 2. - Choix des matériaux utilisés dans la construction du compteur.

La quantité de brome introduite dans le compteur lors du remplissage est de l'ordre de 200 µg. Une diminution de cette quantité, due par exemple à l'absorption par les matériaux du compteur, se traduit par un abaissement de la tension-seuil et une diminution de la longueur du palier. Les compteurs doivent rester utilisables pendant plusieurs années. Durant cette longue période, le brome contenu à l'intérieur des compteurs risque d'être absorbé par les surfaces en métal et en verre qu'ils contiennent. Ces surfaces sont l'une et l'autre de l'ordre de 100 cm<sup>2</sup>. Il est donc nécessaire de sélectionner les matériaux qui ne réagissent pas avec le brome, ou du moins qui, en réagissant, se recouvrent rapidement d'un enduit protecteur, arrêtant ainsi l'absorption. Nous avons essayé dans ce but un certain nombre de métaux, alliages et verres en observant l'évolution de la tension-seuil de compteurs dont la cathode ou l'enveloppe est constituée

par les matériaux à étudier <sup>(16)</sup>. On peut ainsi évaluer une variation de 5% environ de la proportion de brome dans le mélange. A part leur cathode, les compteurs sont identiques. Ils sont tous dégazés et remplis de la même façon suivant la technique indiquée ci-dessous.

Nous avons résumé dans le tableau II les résultats obtenus.

A l'exception des compteurs « Maze » qui sont faits en verre « Novo », tous les compteurs avaient une enveloppe en verre « Moly » ou « B.40 » dont l'absorption est très faible.

TABLEAU II.

Type de cathode	Résultat de l'essai	Observations
1) Verre « Novo » (Compteur « Maze »)	Correct, absorbe très peu	—
2) Cuivre, laiton, zinc, argent, plomb, aluminium, duralumin, bismuth.	Essais non faits	—
3) Nickel	Absorbe très rapidement	—
4) Alliage Fer 50% Nickel 50% (« Platinite »)	Absorbe très rapidement	—
5) Alliage Fer-Nickel-Cobalt (« Kovar », « Dilver P »)	Convient, du moins en petites quantités	Essais faits avec des surfaces de contact métal-gaz de 50 mm <sup>2</sup>
6) Aquadag recuit à 350°	Absorbe assez rapidement	—
7) Fer pur « Armeo »	Convient, absorbe très peu	} Voir courbe d'absorption fig. 2
8) Alliage Fer 70% Chrome 30% (« Dilver O »)	Convient, absorbe très peu	
9) Tantale	Convient, absorbe peu	—
10) Molybdène, Tungstène	Convient, absorbe peu	Essais faits sur de petites surfaces (10 mm <sup>2</sup> )

*Remarque.* — L'utilisation de la technique de Maze, qui consiste à faire passer les charges tombant sur la cathode à travers une paroi de verre mince relativement conducteur, permet d'éviter l'introduction dans le compteur d'une cathode métallique et, par conséquent, est intéressante a priori. Cependant, à basse température (à partir de 0 °C environ) les charges importantes qui se produisent dans les mélanges à halogènes, ne s'écoulent pas assez vite, et le compteur fonctionne mal: après quelques impulsions, la paroi interne se charge et la différence de potentiel entre l'anode et cette

<sup>(16)</sup> Un exemple de ce genre de variation est donné en fig. 2.



« cathode virtuelle » diminue suffisamment pour que l'on se trouve en-dessous du seuil du compteur et le comptage s'arrête.

Bien qu'il ne soit pas exclu, toutefois, qu'avec des verres plus conducteurs on obtienne une solution plus satisfaisante, nous n'avons pas utilisé davantage la technique de Maze pour la construction des compteurs à halogène.

### 3. - Mesure des quantités de courant débitées à chaque impulsion.

Les quantités d'électricité débitées par le compteur ont été mesurées en montant en série le compteur, un galvanomètre de résistance 100  $\Omega$ , une résistance variable de 0 à 10 M $\Omega$  et une haute tension stabilisée variable de 0 à 1500 V. La résistance apparente interne de cette haute tension est inférieure à 10<sup>5</sup>  $\Omega$ . Elle peut débiter 100  $\mu$ A sans subir une chute de tension supérieure à 10 V. La capacité en parallèle sur les bornes de cette haute tension est de l'ordre de 10<sup>-7</sup> F.

En outre, un dispositif de comptage et de contrôle de la forme des impulsions est connecté au compteur à travers une capacité de 15 pF suivie d'un dispositif à cathode asservie.

### REFERENCES

- [1] F. M. PENNING: *Zeits. f. Phys.*, **46**, 335-348 (1927).
- [2] J. A. SIMPSON: *Rev. Sc. Instr.*, **21**, 558-568 (1950) et *MDDC* 870 (Decl. 1947).  
J. A. SIMPSON: *Phys. Rev.*, **72**, 181 (A) (1947).
- [3] M. J. DRUYVESTEYN et F. M. PENNING: *Rev. Mod. Phys.*, **12**, 87 (1940).
- [4] M. L. E. OLIPHANT et P. B. MOON: *Proc. Roy. Soc., A* **127**, 386 (1930).
- [5] S. H. LIEBSON: *Phys. Rev.*, **72**, 181 (A) (1947).  
S. H. LIEBSON et M. FRIEDMAN: *Rev. Sc. Instr.*, **19**, 303-306 (1948).
- [6] R. D. PRESENT: *Phys. Rev.*, **72**, 243-244 (1947).
- [7] S. H. LIEBSON: *Rev. Sc. Instr.*, **20**, 483 (1949).
- [8] E. FRANKLIN et W. R. LOOSEMORE: *Symposium on radiation monitoring Apparatus* (London, The institution of Electrical Engineers 1950) (part II, n. 62. April 1951, pp. 237-240).
- [9] J. R. DOWNING et G. MELLEN: *Rev. Sc. Instr.*, **17**, 218 (1946).  
C. GIMENEZ et J. LABEYRIE: *Journ. Phys. Rad.*, **12**, 64 A - 65 A (1951).
- [10] D. H. LE CROISSETTE et J. YARWOOD: *Journ. Sc. Instr.*, **28**, 225-229 (1951).

### RIASSUNTO (\*)

Si descrive il modo di costruzione e qualche proprietà di un tipo di contatore per raggi  $\beta$  e  $\gamma$ , riempito di un miscuglio neon-argon-bromo. I contatori di questo tipo sono stabili e robusti, funzionano a bassa tensione (350 V) e sono poco sensibili alle variazioni di temperatura fra -70 °C e +125 °C.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Photoelasticity in Crystals.

F. G. FUMI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 17 Dicembre 1951)

The phenomenological theory of photoelasticity involves <sup>(1,2)</sup> a fourth order polar tensor  $pq$  ( $p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). The schemes of photoelastic constants for the various crystal classes have been given by POCKELS <sup>(1)</sup> and recently re-obtained by MASON <sup>(2)</sup> with a different method but BHAGAVANTAM <sup>(3)</sup> has pointed out errors in the schemes for symmetries  $C_3$ ,  $S_6$ ;  $C_{3h}$ ,  $C_6$ ,  $C_{6h}$ ;  $C_4$ ,  $S_4$ ,  $C_{4h}$ ; and  $T$ ,  $T_h$ .

The corrected schemes are given below <sup>(4,5)</sup>: they hold both for stress-optical and strain-optical coefficients (stress and strain components are defined as  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ ).

$C_3, S_6$					
11	12	13	14	15	16
12	11	13	-14	-15	-16
31	31	33	0	0	0
41	-41	0	44	45	46
-46	46	0	-45	44	41
-16	16	0	-15	14	$\frac{1}{2}$ (11-12)

$C_{3h}, C_6, C_{6h}$					
11	12	13	0	0	16
12	11	13	0	0	16
31	31	33	0	0	0
0	0	0	44	45	0
0	0	0	45	44	0
-16	16	0	0	0	$\frac{1}{2}$ (11 12)

$C_4, S_4, C_{4h}$					
11	12	13	0	0	16
12	11	13	0	0	16
31	31	33	0	0	0
0	0	0	44	45	0
0	0	0	45	44	0
61	-61	0	0	0	66

$T, T_h$					
11	12	13	0	0	0
13	11	12	0	0	0
12	13	11	0	0	0
0	0	0	44	0	0
0	0	0	0	44	0
0	0	0	0	0	44

<sup>(1)</sup> F. POCKELS: *Ann. Phys. Chem.*, **37**, 144 (1889); *Lehrbuch der Krystalloptik* (Leipzig, 1906), p. 460. See also G. SZIVESZT: *Hand. d. Phys.*, **21**, 832 (Berlin, 1929).

<sup>(2)</sup> W. P. MASON: *Bell System Tech. Journ.*, **29**, 186 (1948).

<sup>(3)</sup> S. BHAGAVANTAM: *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **16**, 359 (1942).

<sup>(4)</sup> F. G. FUMI: *Acta Cryst.*, **5**, 45 (1952).

<sup>(5a)</sup> F. G. FUMI: *Matter tensors in symmetrical systems*, to appear.

Experimental verification of the consequences of these schemes would be interesting: so far it has been done only for symmetries  $T$  and  $T_h$  <sup>(5)</sup>. The re-

<sup>(5)</sup> S. BHAGAVANTAM and D. SURYANARAYANA: *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **26**, 97 (1947); *Acta Cryst.*, **2**, 26 (1949).

markable consequence of the corrected schemes for symmetries  $C_3$ ,  $S_6$ ,  $C_{3h}$ ,  $C_6$  and  $C_{6h}$  is the possibility of making crystals of these classes *become optically biaxial by a pure shear in the plane perpendicular to the principal axis*; it is of practical interest that an eventual compression along the principal axis does not make the crystal biaxial. The consequence for crystals of symmetries  $C_4$ ,

$S_4$  and  $C_{4h}$  is not so neat. A shear parallel to the principal axis  $z$  does not only incline the optical axis toward it, but also *brings it out of the plane of shear*: practically speaking, however, one will have to observe the behaviour of the line bisecting the two optical axes since compression  $\perp z$  makes the crystal become biaxial.

## Une déduction non ondulatoire des formules de la diffraction des particules sur un cristal.

F. J. WIŚNIEWSKI

*Lodz (Pologne)*

(ricevuto il 18 Dicembre 1951)

On va donner dans cette note une démonstration des formules de la diffraction des particules matérielles sur un cristal et tout spécialement des formules de Laue en utilisant uniquement le principe de Hamilton et les propriétés des réseaux cristallins sans faire appel aux propriétés ondulatoires de la matière.

Soit un corpuscule de masse  $m$  projeté du point  $A$  vers un cristal dans lequel il pénètre. La il peut se heurter contre une molécule du cristal. Cette rencontre peut avoir pour conséquence une déviation de la direction de sa propagation.

Notre but est de calculer cette déviation. Désignons par  $A$  le point de départ du projectile, par  $B$  le point de son arrivé, et par  $P(xyz)$  le point du réseau cristallin où se trouve la molécule du cristal contre lequel se heurte le projectile. Entourons le point  $P(xyz)$  par une surface sphérique de très petit rayon. Le centre de cette sphère est le point  $P$ . On désignera le point d'intersection de la trajectoire  $AP$  avec la surface sphérique par  $P'(x'y'z')$  et le point d'intersection de cette surface avec la trajectoire  $PB$  par  $P''(x''y''z'')$ . Dans ce qui suit on admet que les points  $A$  et  $B$  sont stables et les points  $P'$  et  $P''$  mobiles.

On désignera par  $L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  la fonction de Lagrange. Le principe de Hamilton s'écrira alors:

$$(A) \quad \delta J = \lim_{P' \rightarrow P'' \rightarrow P} \delta \bar{J} = \lim_{P' \rightarrow P'' \rightarrow P} \delta \left[ \int_P^{P'} L dt + \int_{P''}^B L dt \right]$$

Alors d'une manière connue on obtient pour la première variation  $\delta \bar{J}$  l'expression:

$$(B) \quad \delta \bar{J} = [L' - \dot{x}'p'_x - \dot{y}'p'_y - \dot{z}'p'_z] \delta t' + p'_x \delta x' + p'_y \delta y' + p'_z \delta z' - \\ - [L'' - \dot{x}''p''_x - \dot{y}''p''_y - \dot{z}''p''_z] \delta t'' - p''_x \delta x'' - p''_y \delta y'' - p''_z \delta z'',$$

si l'on admet que les trajectoires du projectile entre  $A$  et  $P'$  et entre  $P''$  et  $B$  sont déterminées par les équations de Lagrange et si l'on tient compte de l'hypothèse faite plus haut sur la stabilité des points  $A$ ,  $B$ ,  $P'$ ,  $P''$ .

On a posé plus haut

$$p_x = \dot{\partial L} / \partial \dot{x} ; \quad p_y = \dot{\partial L} / \partial \dot{y} ; \quad p_z = \dot{\partial L} / \partial \dot{z} .$$

Si l'on fait tendre maintenant les points  $P'$  et  $P''$  vers le point  $P$  on aura à poser :

$$\delta t = \delta t' = \delta t'' ; \quad \delta x = \delta x' = \delta x'' ; \quad \delta y = \delta y' = \delta y'' ; \quad \delta z = \delta z' = \delta z''$$

Alors la variation  $\delta J$  s'écrit

$$(C) \quad \delta J = \delta t [L - \dot{x} p_x - \dot{y} p_y - \dot{z} p_z]' - [L - \dot{x} p_x - \dot{y} p_y - \dot{z} p_z]'' - \\ - [p_x' - p_x''] \delta x - [p_y' - p_y''] \delta y - [p_z' - p_z''] \delta z .$$

Les valeurs à un indice (') correspondent au moment immédiatement avant le choc et les grandeurs à deux indices (') correspondent au moment immédiatement après le choc.

En tenant compte de la relation :

$$L - \dot{x} p_x - \dot{y} p_y - \dot{z} p_z = -[T + U] ,$$

où  $T$  est l'énergie cinétique du projectile et  $U$  l'énergie potentielle du projectile par rapport au réseau cristallin, on écrira la condition d'extremum

$$\delta J = 0 .$$

qui doit être satisfaite au point  $P$  du réseau cristallin comme suit :

$$(D) \quad \{ [T + U]' - [T + U]'' \} \delta t + [p_x' - p_x''] \delta x + \\ + [p_y' - p_y''] \delta y + [p_z' - p_z''] \delta z = 0 .$$

Dans l'expression ci-dessus  $\delta t$  est arbitraire mais  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  ne le sont pas car ils sont soumis à la condition de se trouver dans un plan du réseau cristallin dont l'équation s'écrit :

$$(E) \quad [k_1 b_{1x} + k_2 b_{2x} + k_3 b_{3x}] x + [k_1 b_{1y} + k_2 b_{2y} + k_3 b_{3y}] y + \\ + [k_1 b_{1z} + k_2 b_{2z} + k_3 b_{3z}] z = \sqrt{k_1 k_2 k_3} ,$$

où  $k_1, k_2, k_3, \sqrt{k_1 k_2 k_3}$  (\*), sont des nombres entiers et  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  les vecteurs du réseau inverse.

Les variations  $\delta x, \delta y, \delta z$  sont liées par la relation :

$$(E') \quad [k_1 b_{1x} + k_2 b_{2x} + k_3 b_{3x}] \delta x + [k_1 b_{1y} + k_2 b_{2y} + k_3 b_{3y}] \delta y + \\ + [k_1 b_{1z} + k_2 b_{2z} + k_3 b_{3z}] \delta z = 0 .$$

En employant la méthode des coefficients indéterminés on obtient à partir des

(\*) En désignant par  $n_1 \mathbf{a}_1, n_2 \mathbf{a}_2, n_3 \mathbf{a}_3$  où  $n_1, n_2, n_3$  sont des nombres entiers les vecteurs des trois points situés sur le plan (E), on a entre les nombres entiers  $n_1, n_2, n_3; k_1, k_2, k_3$  les relations

$$k_1 = n_2 n_3 ; \quad k_2 = n_1 n_3 ; \quad k_3 = n_1 n_2 .$$



équations (D) et (E') les relations suivantes:

$$(F) \quad (T + U)' = (T + U)'',$$

$$(G) \quad \begin{cases} p_x'' - p_x' = h[k_1 b_{1x} + k_2 b_{2x} + k_3 b_{3x}] \\ p_y'' - p_y' = h[k_1 b_{1y} + k_2 b_{2y} + k_3 b_{3y}] \\ p_z'' - p_z' = h[k_1 b_{1z} + k_2 b_{2z} + k_3 b_{3z}] \end{cases}$$

où  $h$  est une constante.

En désignant par  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  les angles que fait la quantité du mouvement  $p''$  avec les axes  $(x, y, z)$  et par  $\alpha_{0x}, \alpha_{0y}, \alpha_{0z}$  les angles que fait la quantité  $p'$  avec les axes  $(x, y, z)$ , on a:

$$(H) \quad \begin{cases} p_x'' = p'' \cos \alpha_x; & p_x' = p' \cos \alpha_{0x} \\ p_y'' = p'' \cos \alpha_y; & p_y' = p' \cos \alpha_{0y} \\ p_z'' = p'' \cos \alpha_z; & p_z' = p' \cos \alpha_{0z}. \end{cases}$$

Comme l'énergie cinétique  $T$  est uniquement fonction de  $p$ , de l'égalité

$$U'(x, y, z) = U''(x, y, z)$$

au point  $P$  et de la relation (F) suit que

$$(I) \quad p' = p'' = p$$

au même point.

En tenant compte de (H) et (I) les relations (G) s'écrivent

$$(G') \quad \begin{cases} p[\cos \alpha_x - \cos \alpha_{0x}] = \hbar n[j_1 b_{1x} + j_2 b_{2x} + j_3 b_{3x}] \\ p[\cos \alpha_y - \cos \alpha_{0y}] = \hbar n[j_1 b_{1y} + j_2 b_{2y} + j_3 b_{3y}] \\ p[\cos \alpha_z - \cos \alpha_{0z}] = \hbar n[j_1 b_{1z} + j_2 b_{2z} + j_3 b_{3z}]. \end{cases}$$

Le nombre entier  $n$  est le diviseur commun des nombres entiers  $k_1, k_2, k_3$

$$k_s = n j_s \quad (s = 1, 2, 3).$$

Les équations (G') donnent la direction du projectile diffracté si l'on connaît la direction de la trajectoire du projectile incident.

Si le projectile est un photon c'est-à-dire si  $p = h/\lambda$  on obtient les équations de Laue pour la diffraction des rayons de Röntgen.

D'une manière connue on obtient à partir des équations (G') la relation de Bragg pour les rayons corpusculaires. On a obtenu les relations (G') pour la diffraction des rayons corpusculaires par les cristaux sans faire appel aux propriétés ondulatoires de la matière.

Le même procédé conduit aux relations connues obtenues par des raisonnements ondulatoires pour la diffraction de la lumière visible sur des réseaux artificiels.

## Un nuovo metodo di coincidenza.

E. GATTI e E. GERMAGNOLI

*Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 17 Dicembre 1951)

La tecnica della selezione ad alto potere risolutivo (da  $10^{-7}$  a  $10^{-10}$  s) di eventi contemporanei è orientata in genere, quando gli impulsi provenienti dagli apparecchi di rivelazione siano di sufficiente ampiezza, verso l'uso diretto, senza previa amplificazione dei segnali, di elementi non lineari quali elementi di coincidenza (per es. <sup>(1)</sup>).

Quando si richieda amplificazione per poter azionare il circuito di coincidenza, sono usati 2 (o  $n$ , per coincidenze di molteplicità  $n$ ) amplificatori rapidi di tipo convenzionale per poteri risolutivi non minori di qualche  $10^{-8}$  s o amplificatori

Si propone un sistema di coincidenza, usabile anche per i poteri risolutivi più spinti consentiti dalle tecniche attuali e estensibile anche al caso di coincidenze multiple, facente uso di un solo amplificatore e di due linee di ritardo connesse secondo lo schema di principio riportato in fig. 1.

Il concetto informatore del metodo è quello di utilizzare successivamente nel tempo il medesimo amplificatore per gli impulsi dati contemporaneamente da due rivelatori. A tale scopo, i segnali provenienti da  $R_1$  sono ritardati dalla linea  $L_1$  e mescolati con gli impulsi provenienti direttamente da  $R_2$ . I segnali, contemporanei sui rivelatori, si presentano pertanto all'ingresso dell'amplificatore come una coppia di impulsi spazati dell'intervallo  $\tau$  caratteristico della linea  $L_1$ . La coppia, amplificata, viene poi inviata direttamente ad uno dei rami della coincidenza, e indirettamente all'altro ramo previo un ritardo pure eguale a  $\tau$ , introdotto da  $L_2$ ; il secondo impulso della coppia non ritardata coincide così temporalmente col primo della coppia ritardata.

Con tale metodo, oltre a far uso di un solo amplificatore, non si impone più nessuna condizione stringente sulla costanza del ritardo da questo introdotto.

Il numero di coincidenze spurie, a pari potere risolutivo degli elementi im-



Fig. 1.

$R_1, R_2$	apparecchi di rivelazione
$L_1, L_2$	linee di ritardo
$A$	amplificatore
$C$	circuito di coincidenza

a costanti distribuite per tempi di risoluzione più brevi (per es. <sup>(2)</sup>). Detti amplificatori sono costosi e debbono presentare grande stabilità nel tempo di ritardo da essi introdotto.

<sup>(1)</sup> E. F. SHRADER: *R.S.I.*, **21**, 883 (1950).

<sup>(2)</sup> A. LUNDBY: *R.S.I.*, **22**, 324 (1951).

piegati, risulta doppio che col sistema convenzionale (se  $R_1$  e  $R_2$  danno in media uguale numero di impulsi): si può osservare infatti che due impulsi, spazati casualmente dell'intervallo  $\tau$  e provenienti dallo stesso rivelatore, provocano un conteggio spurio. A ciò, quando interessi, si può ovviare utilizzando un elemento di coincidenza sensibile ad impulsi di segno contrario, e facendo sì che uno dei rivelatori dia segnali di segno opposto a quelli dell'altro.

Tale metodo è stato sperimentato per ora con tempi risolutivi relativamente grandi ( $10^{-7}$  s) e per coincidenze doppie, con un amplificatore di tipo convenzionale (amplificazione 8 000, tempo di salita

$4 \cdot 10^{-8}$  s) e linee di ritardo a costanti concentrate (tempo di ritardo 1  $\mu$ s, tempo di salita 0,1  $\mu$ s); la coincidenza è a diodi al Germanio. Come rivelatori ci siamo serviti di due fototubi 931A associati a uno scintillatore liquido (xilolo + + terfenile). Con il metodo qui esposto il fondo dei fototubi è stato praticamente eliminato e i risultati preliminari di rivelazione di raggi  $\gamma$  ottenuti con tale strumento sono pienamente soddisfacenti.

Ringraziamo il prof. G. BOLLA per il suo interessamento al presente lavoro, e il sig. A. MAGGIONI per la pratica realizzazione e messa a punto degli strumenti.

## Sullo spettro di energia della componente nucleonica a varie quote.

G. CORTINI, A. MANFREDINI e G. SEGRÈ

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma*

(ricevuto il 22 Dicembre 1951)

È stato eseguito uno studio delle esplosioni nucleari prodotte dalla radiazione cosmica in lastre Ilford G5 da 400  $\mu$  esposte a  $\sim 60$  g/cm<sup>2</sup> dal limite dell'atmosfera, per circa 2 ore.

Le stelle con un numero di rami sciami (al minimo di ionizzazione)  $s \geq 4$  sono state selezionate, a seconda della natura della particella che le generava, in stelle- $p$  (da protoni), stelle- $n$  (da neutroni) e stelle- $\alpha$  (da particelle  $\alpha$ ). La base della selezione è data dallo scarto angolare tra l'asse dello sciami e la presunta traccia primaria. Le stelle con  $s \leq 3$  sono state classificate in stelle- $p$ , e stelle- $(n + \alpha)$  con i criteri usuali <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>. I grafici  $p$ ,  $n$  e  $\alpha$  di fig. 1 mostrano gli spettri integrali di molteplicità delle stelle così classificate: in ascisse è riportato il numero dei soli rami al minimo.

Come si vede, l'aver separato le stelle- $\alpha$  dalle stelle- $n$  (per  $s \geq 4$ ) ci ha permesso di mettere in luce un andamento completamente diverso per le stelle- $p$  e le stelle- $n$  (curve  $p$  ed  $n$ ).

È possibile cercare di separare dall'insieme di tutte le stelle la frazione generata direttamente da particelle appartenenti alla componente primaria della radiazione cosmica. Infatti i neutroni sono certamente di origine secondaria e si può ammettere che nell'interazione di un protone primario con un nucleo dell'aria venga prodotto in media un numero circa uguale di protoni e neutroni. D'altra parte esistono delle ragioni per ritenere che l'energia delle particelle che producono stelle aventi  $s \geq 2$  sia in media ancora così alta che il rapporto  $p/n$  per queste particelle non risulti sensibilmente alterato dalle perdite di energia per ionizzazione. Allora, il numero delle stelle- $p$  da secondari sarà circa uguale al numero delle stelle- $n$ , e la differenza tra le curve  $p$  e  $n$  di fig. 1 darà (per  $s \geq 2$ ), lo spettro di molteplicità dovuto alle sole particelle primarie (fig. 2, curva  $A$ ). All'inflessione di questo spettro per  $s \leq 5$ , contribuisce il taglio geomagnetico, in una misura che è difficile valutare.

È interessante confrontare i nostri spettri di molteplicità con quello osservato a 3500 m dal Gruppo di Bristol <sup>(2)</sup>. Nella curva  $B$ , fig. 2, che rappresenta questi dati, le stelle- $p$  e le stelle- $n$  sono state riunite perchè nella statistica di

<sup>(1)</sup> J. J. LORD: *Phys. Rev.*, **81**, 901 (1951);  
E. O. SALANT, J. HORNBOSTEL, C. B. FISK  
e J. E. SMITH: *Phys. Rev.*, **79**, 184 (1950).

<sup>(2)</sup> R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL:  
*Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

Bristol il rapporto  $p/n$  non varia sensibilmente al variare di  $s$  (per  $s \geq 2$ ) e precisamente si mantiene  $\simeq 1$  entro gli

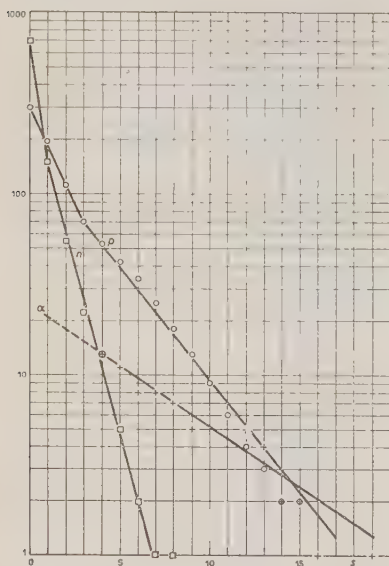


Fig. 1. - Spettri integrali di molteplicità in rami sciame delle stelle a  $\sim 60 \text{ g/cm}^2$ . In ascisse numero di rami sciame ( $s$ ). In ordinate numero assoluto delle stelle aventi un numero di rami sciame  $\geq s$ .

- stelle prodotte da protoni
- stelle prodotte da neutroni
- + stelle prodotte da particelle  $\alpha$ .

errori (naturalmente a 3500 m non ci sono più stelle  $\alpha$ ). È evidente il parallelismo, per  $s \geq 5$ , tra le due curve di fig. 2, che anzi in quella zona risultano sensibilmente sovrapposte. Naturalmente quest'ultima circostanza è puramente casuale.

Dall'insieme di questi dati si possono trarre alcune conclusioni degne di nota, che verranno discusse in modo più dettagliato in un successivo lavoro:

1) Il confronto delle due curve di fig. 2 mostra che per  $s \geq 5$ , lo spettro differenziale di molteplicità  $F(s, t)$  si conserva al variare della profondità  $t$  nel-

l'atmosfera, cioè è della forma  $F(s, t) = F(s) \cdot T(t)$ .

Ciò dà un'indicazione sperimentale diretta che anche lo spettro differenziale di energia  $f(E, t)$  si conserva a partire da una certa energia minima. È difficile dire in qual misura tale indicazione risulti stringente, tenuto conto degli errori statistici. Ciò dipende dalla forma della funzione  $p(E, s)$  che esprime la probabilità media affinché un nucleone di energia  $E$ , urtando un nucleo dell'emulsione,

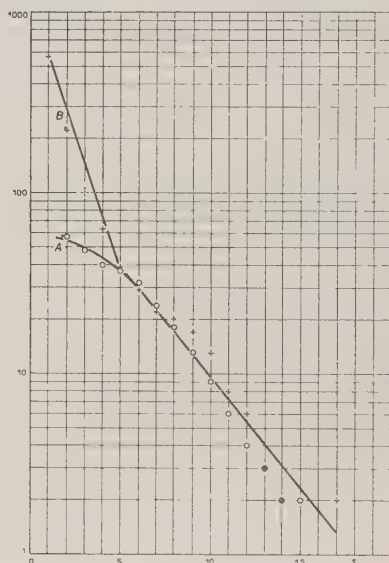


Fig. 2. - Spettro integrale di molteplicità in rami sciame a quota montana e nella stratosfera. Ascisse e ordinate come in fig. 1.

- (curva A) Roma 20 000 m (primari)
- + (curva B) Bristol 3 500 m (totale)

generi una stella con  $s$  rami al minimo. Si ha infatti ovviamente

$$F(s, t) = \int_0^\infty f(E, t) p(E, s) dE.$$

2) Il confronto (fatto mediante la trasformazione di Gross) della frequenza



delle stelle con  $s \geq 5$  alle due quote, dà un cammino di assorbimento in aria della componente nucleonica di alta energia pari a  $108 \pm 5$  g/cm<sup>2</sup>.

3) Il rapporto  $n/p$  per i nucleoni di alta energia (che producono la maggioranza delle stelle con  $s \geq 5$ ) varia lentamente da 0 (per  $t = 0$ ) a  $\sim 1$  per  $t = 680$  g/cm<sup>2</sup>, tanto che alla nostra quota la curva  $n$  non mostra ancora alcuna tendenza a divenire parallela alla curva  $p$  (fig. 1). Poichè a 680 g/cm<sup>2</sup> il rapporto  $n/p$  risulta di  $0,62 \pm 0,25$  non si può dire se a questa quota l'equilibrio tra neutroni e protoni sia già effettivamente raggiunto o meno. Appare estremamente desiderabile aumentare la statistica a 3500 m, o meglio ancora procurarsi dei dati a quote intermedie.

4) Per  $s < 4$  la situazione è completamente diversa. Rispetto alla sua forma per  $t = 0$  (curva  $A$ , fig. 2) la  $F(s, t)$  è già radicalmente cambiata per  $t = 60$  (curva  $p$  + curva  $n$ , fig. 1) ed è già simile alla  $F(s, 680)$ . Ciò corrisponde ad un analogo comportamento della  $f(E, t)$  per le basse energie e dunque ad una intensa e rapida generazione di secondari degradati.

Della rapidità di tale generazione sono responsabili in parte le evaporazioni in corsa dei nuclei pesanti e delle particelle  $\alpha$  della radiazione primaria, e in parte le collisioni dei protoni primari con i nuclei dell'aria. La generale scarsità dei dati e l'insufficienza delle teorie rende difficile

una analisi quantitativa di queste due cause.

5) Il confronto tra le varie teorie e gli spettri di molteplicità osservati in lastre fotografiche può essere fatto (assumendo lo spettro di energia primario) solo a molteplicità  $s \geq 5$ . Infatti in alta quota le frequenze alle basse molteplicità sono probabilmente alterate dal taglio geomagnetico, mentre a bassa quota non c'è alcuna ragione per ritenere che la parte dello spettro dovuta ai secondari di bassa energia coincida proprio con lo spettro che avrebbe la radiazione primaria in assenza del taglio geomagnetico. Ciò diminuisce grandemente il valore dei confronti eseguiti finora <sup>(3)</sup>.

Le lastre utilizzate per questa ricerca sono state esposte in un lancio di palloni sonda organizzato in collaborazione dal Centre de Physique Nucléaire di Bruxelles e dal nostro Istituto.

I nostri più vivi ringraziamenti vanno ai direttori dei due Istituti, proff. M. COSYNS ed E. AMALDI, nonché a C. C. DILWORTH, che ha curato lo sviluppo delle lastre.

Siamo inoltre grati all'Aeronautica Militare e in particolare al dott. A. PERSANO, per la generosa collaborazione nella preparazione ed esecuzione del lancio.

<sup>(3)</sup> W. HEITLER e L. JÁNOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 669 (1949).

## Current Fluctuations in Quantum Electrodynamics.

E. CORINALDESI (\*)

*Division of Physics, National Research Council - Ottawa, Canada*

(ricevuto il 7 Gennaio 1952)

We consider the integral

$$(1) \quad J_\mu = \int_v j_\mu(x) d^4x,$$

where  $j_\mu \equiv (\mathbf{j}, \rho)$  denotes the charge-current operator of a matter field in interaction representation, and  $v$  is a 4-dimensional region. The quantity (1)

$$(2) \quad J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \langle \{ J_\mu, J_\nu \} \rangle,$$

was evaluated in a previous letter (2) in the special case  $\mu = \nu = 0$  (« charge » fluctuations). Various types of matter fields were considered (E.F., S.F. and V.F.). Following the notation adopted there, we shall now calculate the remaining components of (2).

From the equation

$$(3) \quad J_{\mu\nu} = \frac{1}{2(2\pi)^8} \int (k_\mu k_\nu - k^2 \delta_{\mu\nu}) \Im f(k) d^4k \cdot \left| \int_v \exp[i(k, x)] d^4x \right|^2,$$

and on the assumption that  $v$  consists of a sphere and a time interval, it is readily seen that  $J_{\mu\nu}$  vanishes when  $\mu \neq \nu$ . It also holds that  $J_{11} = J_{22} = J_{33} = J$  (« current » fluctuations), and the expression for  $J$  can be obtained from (1, 2) on replacement of  $|\mathbf{k}|^2$  by  $k_0^2 - (2/3)|\mathbf{k}|^2$ .

If the parameter  $b_0$  is zero, the integral over  $k_0$  occurring in  $J$  diverges for all types of matter fields (while for  $J_{00} = \langle Q^2 \rangle$  this happens in the V.F. case only!). Leaving aside the V.F. case, which does not present any physical interest, we wish to make some comments on the order of magnitude assumed by  $J$  for E.F. and S.F., when the time « smearing-out » width is supposed to be different from zero, although

(\*) National Research Laboratories Postdoctorate Fellow.

(1) This quantity is not a tensor unless  $v$  is a relativistically invariant region, which will not be the case in this note.(2) E. CORINALDESI: *Nuovo Cimento*, **8**, 494 (1951) (in the following referred to as I). Due to a misprint  $k^4$  appears instead of  $k^2$  in the denominators of eqs. (I, 8).

much smaller than the Compton wave-length  $1/m$ . We have then

$$(4) \quad J \gtrsim \frac{e^2 L^3}{b_0}.$$

The space width  $b$  does not occur in this approximate value of  $J$ , which depends linearly on  $1/b_0$ ; for  $b_0$  approaching zero. In contrast with this,  $J_{00}$  for E.F. and S.F. depends logarithmically on the space width  $b$  for  $b \ll 1/m$ . Note that such a dissimilarity in the behaviour of  $J_{00}$  and  $J$  may be rather important <sup>(3)</sup>. Therefore it may be useful to trace its origin.

For this purpose let us replace the interaction representation operator (1) by the corresponding operator  $J_{\mu}^{II}$  in the Heisenberg representation. This can be expressed in terms of the electromagnetic field strengths  $e^H$  and  $h^H$ :

$$(5a) \quad J_0^H = \int_{-L_0}^{+L_0} dx_0 \int_{\sigma} e^H n d\sigma,$$

$$(5b) \quad J^H = \int_{-L}^{+L} dx_0 \int_{\sigma} n \wedge h^H d\sigma - \int_{-L_0}^{+L_0} e^H d^3x.$$

where  $\sigma$  is the boundary of the space region  $\tau$  (a sphere, in our case).  $n$  denotes the normal to  $\sigma$ , and all regions are assumed to be sharply defined.

Note that, as well as the surface integral, which is analogous to the one occurring on the right hand side of (5a),  $J^H$  contains also an additional term. This last is the difference between the values assumed by the integral over  $\tau$  of the electric field at the beginning and end of the time interval. We can now express  $J_{\mu\nu}^{II}$  as a power series of  $e$  by making explicit use of (5a) and (5b) and of the properties of the Heisenberg operators of the electromagnetic field. The first non-vanishing term is proportional to  $e^2$  and coincides with  $J_{\mu\nu}$ . By this approach it is possible to isolate that part of  $J$  which is linearly divergent, and to identify it as the contribution from the second term of (5b).

I wish to express my gratitude to Profs. R. PEIERLS and L. ROSENFELD for interesting discussions on the subject of this note.

<sup>(3)</sup> N. BOHR and L. ROSENFELD: *Phys. Rev.*, **78**, 794 (1950). (Cf. in particular footnote 8).

## Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nello stilbene.

M. AGENO e G. CORTELLESSA

*Istituto Superiore di Sanità - Roma*

(ricevuto il 9 Gennaio 1952)

È stata recentemente dimostrata nel nostro Laboratorio <sup>(1-2)</sup> l'esistenza, in soluzioni che danno luogo a scintillazioni sotto l'azione di particelle alfa, di fenomeni di trasporto dell'energia su distanze dell'ordine di alcuni millimetri. Il meccanismo di tali fenomeni è sostanzialmente il seguente. Una frazione dell'energia delle particelle alfa incidenti si trasforma in energia di eccitazione di molecole del solvente. Queste, diseccitandosi, emettono una radiazione nel prossimo ultravioletto, la quale viene energeticamente riassorbita dalle molecole del soluto. Le molecole del soluto così eccitate, con un ben noto processo, dissipano parte dell'energia assorbita e parte ne rimettono sotto forma di luce di fluorescenza caratteristica del soluto.

Per quanto non sia evidentemente possibile attendersi un identico meccanismo di trasporto nei cristalli organici, abbiamo tuttavia voluto vedere se in alcuni almeno di questi cristalli non avvengano fenomeni di trasporto dell'energia su distanze dello stesso ordine di quelle osservate nelle soluzioni.

Ci siamo a questo fine serviti di un cristallo di trans-stilbene delle dimensioni di  $1,5 \times 2,5 \times 2$  cm<sup>3</sup>, fornitoci dalla Larco Nuclear Instrument Co. Per quanto seriamente danneggiato durante il viaggio, tale cristallo è risultato ancora idoneo allo scopo.

La tecnica adottata per mettere in evidenza un eventuale fenomeno di trasporto è identica a quella già usata per le soluzioni e consiste sostanzialmente nel produrre su di una pellicola fotografica una immagine ottica della sorgente di luce di fluorescenza. Siccome le particelle alfa penetrano nel cristallo per meno di una cinquantina di micron, in assenza di fenomeni di trasporto, tale sorgente deve risultare limitata ad uno straterello sottilissimo del cristallo stesso. Se invece essa risulta estesa ad una porzione apprezzabile di quest'ultimo, la luce di fluorescenza viene emessa da punti sicuramente non raggiunti dalle particelle eccitatrici e l'energia ceduta dalle alfa deve viaggiare per un tratto di lunghezza apprezzabile attraverso il cristallo prima di trasformarsi nella nota radiazione di fluorescenza.

La sorgente di particelle alfa impiegata è costituita da un dischetto di nichel di circa 5 mm di diametro, con depositi

<sup>(1)</sup> M. AGENO e R. QUERZOLI: *Rend. Acc. Lincei*, **11**, 265 (1951).

<sup>(2)</sup> M. AGENO e R. QUERZOLI: *Rend. Acc. Lincei* (in corso di stampa).

sopra alcuni millieurie di Polonio. Tale sorgente veniva posta immediatamente al di sopra della faccia minore del cristallo, non a contatto con essa. Le fotografie sono state prese dalla faccia maggiore, con un obbiettivo Summarit 1 : 1,5,

del cristallo, pur avendosi una distribuzione spaziale della fluorescenza del tutto diversa da quella che si osserva coi raggi  $\gamma$  del Radio. La diffusione sulle facce del cristallo fa sì che questo sia però ancora interamente visibile.

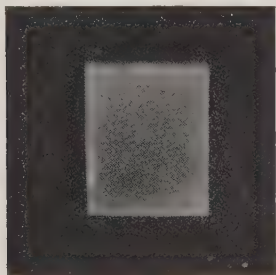


Fig. 1. - Raggi  $\gamma$  del Ra. Posa 1<sup>m</sup>.

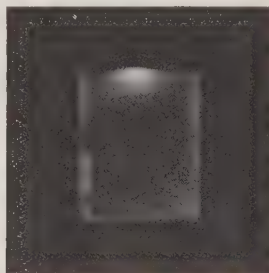


Fig. 2. - Particelle  $\alpha$  del Po.  
Posa: 30<sup>m</sup>.

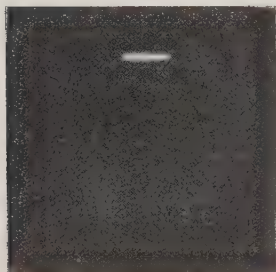


Fig. 3. - Schermo fosforescente.  
Posa: 13<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>.

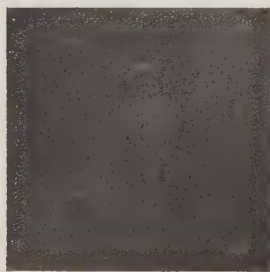


Fig. 4. - Particelle  $\alpha$  del Po con  
schermo di Al da 0,02 mm.  
Posa: 5<sup>h</sup>.

a 36 cm di distanza, con pose variabili tra un minuto e qualche ora.

Abbiamo innanzi tutto eccitato la fluorescenza del cristallo coi raggi  $\gamma$  emessi da una piastra contenente 20 mC di Radio (fig. 1) e verificato che nessuna apprezzabile differenza si avesse interponendo una lamina di alluminio dello spessore di 0,1 mm.

La fig. 2 rappresenta la fotografia ottenuta eccitando il cristallo con le particelle alfa del Polonio. Come si vede, la luce viene emessa da una zona estesa

Per verificare che l'effetto della fig. 2 non sia interamente dovuto alla diffusione, abbiamo sostituito alla sorgente di particelle alfa un pezzetto di schermo fosforescente e fatta una posa sufficientemente lunga da poter osservare sul negativo l'intero cristallo illuminato dalla luce dello schermetto. Come si vede nella fig. 3, che dimostra il risultato di questa prova, non abbiamo in tal modo ottenuta alcuna traccia dell'alone diffuso, che si osserva nella fig. 2 attorno alla sorgente di particelle alfa.



Infine, abbiamo interposto tra la sorgente di particelle alfa e la faccia superiore del cristallo una laminetta di alluminio dello spessore di 0,02 mm, tale da assorbire interamente le alfa del Polonio (fig. 4). Nessuna luminescenza si è in tal modo osservata da parte del cristallo, neppure con pose assai più lunghe di quelle delle fotografie precedenti. Abbiamo verificato, togliendo il cristallo, che la debolissima traccia luminosa che si osserva nella fig. 4 è dovuta direttamente alla sorgente.

In conclusione, ci sembra di poter affermare che anche nei cristalli di trans-

stilbene parte dell'energia delle particelle alfa eccitatrici viaggia attraverso il cristallo per un tratto dell'ordine di alcuni millimetri prima di trasformarsi in radiazione di fluorescenza.

Sono attualmente in corso esperienze con cristalli di altre sostanze, aventi lo scopo di chiarire l'estensione e il meccanismo del fenomeno. Su di esse si riferirà in seguito.

La sorgente di particelle alfa ci è stata gentilmente fornita dal prof. E. AMALDI, direttore del Centro per la Fisica Nucleare del C.N.R.

# Sull'aumento della ionizzazione specifica primaria alle alte energie.

P. BUDINI (\*) e G. POIANI

*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste*

(ricevuto il 14 Gennaio 1952)

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> (indicato nel seguito con I) uno di noi ha studiato la distribuzione degli ioni primari in una traccia generata da una particella di elevata energia trascurando la dispersione del mezzo.

L'influenza della dispersione del mezzo sulla perdita di energia della particella primaria è stata studiata estesamente da vari autori <sup>(2)</sup> i quali trovano che il noto aumento della perdita di energia al di là del minimo è da attribuirsi in parte alla emissione della radiazione di Cerenkov e che anzi questa causa prevale alle altissime energie. Per le applicazioni sperimentali ha tuttavia interesse conoscere anche l'andamento che è da aspettarsi per la sola ionizzazione alle alte energie. Esporremo alcune considerazioni sulla ionizzazione primaria per urti larghi, essendo questa la sola a risentire l'influenza della dispersione del mezzo. Seguiremo il metodo adottato in I salvo naturalmente a sostituire i campi nel vuoto con quelli in un mezzo dispersivo. Si trova facilmente che se, riferendosi ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, la particella si muove lungo l'asse  $x$  con velocità  $c\beta$  le componenti di Fourier del campo in un punto di coordinate  $(0, y, 0)$  sono:

$$(1) \quad \begin{cases} E_x = \frac{\pi e}{v p \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon \beta^2} \frac{\chi}{i} H_0^{(1)}(i\chi) & E_z = H_x = H_y = 0 \\ E_y = \frac{\pi e}{v p \varepsilon} \chi H_1^{(1)}(i\chi) & H_z = -\frac{\pi e}{c p} \chi H_1^{(1)}(i\chi) \end{cases}$$

con

$$(2) \quad \chi = \frac{2\pi p y}{v} \sqrt{1 - \varepsilon \beta^2},$$

dove  $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$  è la costante dielettrica del mezzo relativa alla frequenza  $\nu$  e per gli altri simboli vedasi I. Con considerazioni analoghe a quelle svolte in I si trova

(\*) Presentemente al Max Planck Institut für Physik - Göttingen.

<sup>(1)</sup> P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **7**, 835 (1950).

<sup>(2)</sup> M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 159 (1951), da consultarsi anche per ulteriore bibliografia.

allora che la probabilità  $P(p)$  che un atomo con parametro d'urto  $p$  venga ionizzato è data da:

$$(3) \quad P(p) = \frac{\pi^2 e^2 c}{v^2 p \hbar} \int_0^{\infty} \frac{\chi^2}{\varepsilon^2} \{ [H_1^{(1)}(i\chi)]^2 + |1 - \varepsilon \beta^2| [H_0^{(1)}(i\chi)]^2 \} \sum_1^Z 1(k - I_n) \sigma_n(k) \frac{dk}{k},$$

che si riduce alla (6) di I per  $\varepsilon = 1$ .

La ionizzazione primaria specifica  $I(\xi)$  (numero di ioni primari per cm di traccia) dovuta ad urti larghi ( $p > \alpha_0 = 10^{-8}$  cm), per una particella di energia  $\xi$  in unità  $mc^2$ , sarà data da

$$(4) \quad I(\xi) = n \int_{\alpha_0}^{\infty} P(p) dp,$$

dove  $n$  è il numero di atomi per unità di volume. Se, in particolare, si tratta di tracce in emulsione fotografica, l'integrazione, per quanto osservato in I andrà estesa da  $\alpha_0$  a  $\varrho = 0,18 \mu$ , ordine di grandezza <sup>(3)</sup> del diametro di un granulo di emulsione nucleare.

Oltre all'andamento di  $I(\xi)$  con  $\xi$ , sarà interessante per le applicazioni sperimentali anche il valore limite  $I(\infty)$  della ionizzazione; questo si otterrà ponendo semplicemente nelle (2) e (3)  $\beta = 1$ .

Per il calcolo effettivo di  $I(\xi)$  si dovranno introdurre nelle (2) e (3) le espressioni della  $\varepsilon(v)$  relativa al mezzo in esame; è da aspettarsi che si ottenga in tal modo, anche per i materiali densi, un limitato aumento della ionizzazione primaria al di là del minimo, in quanto la ionizzazione  $I(\infty)$ , che è di natura relativistica, andrà aggiunta a quella primaria dovuta agli urti stretti, che tende ad un valore limite finito al crescere dell'energia cinetica della particella ionizzante.

Una prima approssimazione di  $I(\infty)$ , specialmente nel caso dei gas, la si può ottenere molto più semplicemente osservando che per  $\beta = 1$  la (3), a meno del fattore  $\varepsilon^{-2}$  sotto il segno di integrale, si identifica con la corrispondente espressione (6) di I quando si sostituisca in quest'ultima l'energia  $\xi = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  con  $\xi_c = (1 - \varepsilon)^{-1/2}$ . Nel caso dei gas in cui si può, nell'espressione della costante dielettrica, trascurare la correzione di Lorens e l'assorbimento, possiamo con buona approssimazione, adottare la nota formula:

$$(5) \quad \varepsilon = 1 + \frac{Zne^2}{\pi m(\bar{v}^2 - v^2)} \quad \text{con} \quad \bar{v} = \prod v_i^{f_i},$$

e allora si vede facilmente che la ionizzazione limite si ottiene in prima approssimazione calcolando la ionizzazione senza dispersione (divisa per  $\varepsilon^2$ ) all'energia

$$(6) \quad \xi_c \approx \frac{v}{e} \sqrt{\frac{\pi m}{Zn}}.$$

Avremo corrispondentemente che la distanza massima dall'asse della traccia alla quale si ha formazione di ioni si otterrà dalla (11) I:

$$(7) \quad A = \frac{\hbar_c}{J} \xi_c.$$

<sup>(3)</sup> G. BARONI e C. CASTAGNOLI: *Nuovo Cimento*, **7**, 364 (1950).

dove  $J$  sarà il potenziale medio di ionizzazione del gas. Tenuto conto che  $J \propto \hbar \bar{\nu}$ , si ha:

$$(8) \quad A = (4\pi r_0 Z n)^{-1/2}, \quad \text{con } r_0 = 2,86 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

formula ottenuta per altra via anche da A. BOHR (4).

Abbiamo riportato in tab. I il valore di  $I(\infty)$  da aspettarsi per alcuni materiali introducendo nella (6) i valori delle costanti desunte dai lavori di O. HALPERN e H. HALL (5) e P. IAUSSENS e M. HUYBRECHTS (6). Abbiamo applicato il metodo anche ad alcuni materiali condensati: naturalmente i valori che si ottengono in questo caso hanno significato puramente qualitativo.

TABELLA I.

Sostanza	$\xi_n$	Aumento limite della ionizzazione primaria riferito al minimo in %
H condizioni normali . . . . .	50	24
He " " . . . . .	100	23
Aria " " . . . . .	130	35
H 100 atmosfere . . . . .	7	3,5
He " " . . . . .	10	6,2
Aria " " . . . . .	11,4	7
Ag . . . . .	$\sim 3,7$	$\sim 0$
Br . . . . .	$\sim 6,8$	$\sim 3,5$
AgBr emulsione . . . . .	$\sim 4,9$	$\sim 2$

Recentemente sono stati osservati limitati aumenti della ionizzazione al di là del minimo nelle emulsioni (7). È plausibile pensare che essi possano spiegarsi come dovuti ad aumento della ionizzazione primaria per urti larghi; per decidere su questo punto sarà tuttavia necessario calcolare in modo esatto la (3) nel caso specifico delle emulsioni. Potrebbe darsi d'altra parte che i citati aumenti possano trovare spiegazione nella variazione con l'energia della particella primaria della massima energia trasmissibile da questa agli elettroni atomici negli urti stretti; un calcolo esatto di questo effetto si presenta alquanto difficile (6). Un chiarimento su questo problema potrebbe ottenersi dallo studio della ionizzazione nei gas. Aumenti della ionizzazione totale dell'ordine di quelli riportati nella tabella I per i gas in condizioni normali sono stati osservati in camera di Wilson (8) (33%); se questi sono aumenti limite dovuti ad urti larghi, allora essi dovrebbero, come risulta dalla tabella I, ridursi di molto ad alta pressione. Se un fenomeno di questo genere potesse venir osservato indurrebbe a pensare che anche i limitati aumenti nelle emulsioni sono da attribuirsi ad urti larghi secondo la (3).

(4) A. BOHR: *Det. Kgl. Dans. Vid. Sels.*, **24**, n. 19 (1948).

(5) O. HALPERN e H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 477 (1948).

(6) P. IAUSSENS e M. HUYBRECHTS: *Bull. Cent. Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 29 (1951).

(7) VOYVODIC: *Congresso di Bristol*, dicembre 1951.

(8) W. E. HAZEN: *Phys. Rev.*, **67**, 269 (1945).

Generazione di mesoni  $\pi$  in piombo ed alluminio esposti ai raggi cosmici.

N. DALLAPORTA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI

*Istituto di Fisica dell'Università - Padova*

(ricevuto il 15 Gennaio 1952)

L'esperienza compiuta da CAMERINI, MUIRHEAD, POWELL e RITSON al laboratorio della Jungfrau nel 1948, per determinare la vita media dei mesoni  $\pi$  <sup>(1)</sup>, aveva mostrato come un numero notevole di mesoni venga emesso in direzioni prossime all'orizzontale da un blocco di Pb esposto alla radiazione cosmica. Questa osservazione ci suggerì di adottare, per lo studio della generazione dei mesoni, la disposizione descritta in N. I <sup>(2)</sup>, che qui riproduciamo (fig. 1). Lastre fotografiche di  $5 \times 5$  cm<sup>2</sup> accoppiate a sandwich, orizzontali, sono circondate da blocchi di metallo di 5 cm di spessore. Le lastre nella posizione B, in particolare, si trovano al centro di un parallelepipedo di  $13 \times 16 \times 16$  cm<sup>3</sup> del metallo. Furono usati blocchi di Pb e di Al rispettivamente, collo scopo di ricavare un'indicazione sul rapporto fra le sezioni efficaci per la produzione dei mesoni in questi due elementi.

I dati che qui riportiamo si riferiscono a lastre Ilford G5 di 200  $\mu$  esposte per 28 giorni (10 Sett.-8 Ott. 1949) sul M. Rosa (m 4550 s.l.m.). La tab. I contiene i numeri (per cm<sup>2</sup> di emulsione e giorno di esposizione) dei mesoni che

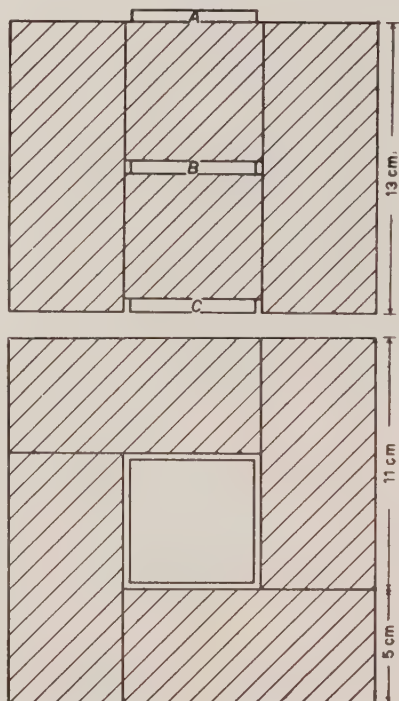


Fig. 1.

<sup>(1)</sup> U. CAMERINI, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL e D. M. RITSON: *Nature*, **162**, 433 (1948).

<sup>(2)</sup> L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

generano una stella di evaporazione nucleare (mesoni  $\sigma$ ) e dei mesoni  $\pi$  che danno origine ad un  $\mu$  (eventi  $\pi \rightarrow \mu$ ).



TABELLA I. - *Eventi registrati per cm<sup>3</sup> di emulsione e per giorno di esposizione.*

	mesoni $\sigma$ ( $\pi^-$ )	eventi $\pi \rightarrow \mu$ ( $\pi^+$ )	$\pi^- + \pi^+$
(a)	$1,54 \pm 0,24$	$0,66 \pm 0,16$	$2,20 \pm 0,29$
(b)	$1,23 \pm 0,16$	$0,46 \pm 0,10$	$1,69 \pm 0,18$
(c)	$0,66 \pm 0,12$	$0,28 \pm 0,08$	$0,94 \pm 0,14$
(a) — (c)	$0,88 \pm 0,27$	$0,38 \pm 0,18$	$1,26 \pm 0,32$
(b) — (c)	$0,57 \pm 0,20$	$0,18 \pm 0,13$	$0,75 \pm 0,23$

(a) lastre in alluminio; (b) lastre in piombo; (c) lastre lontane da materiali densi.

rispettivamente per lastre poste al centro dei blocchi di Alluminio (a) e di Piombo (b), e per lastre lontane dai blocchi e da masse notevoli di materiale (c). Le differenze (a) — (c) e (b) — (c) dovrebbero sostanzialmente fornire la misura della produzione di mesoni nei blocchi di Al e Pb. Il fondo, rappresentato da (c), può in realtà essere modificato dall'assorbimento nei blocchi: la modificazione sarebbe difficile da valutare in termini quantitativi, ma si può ritenere trascurabile di fronte agli errori statistici.

In considerazione dell'entità di questi, e soprattutto del carattere relativo della determinazione che ci proponiamo non introduciamo correzioni per i mesoni  $\pi^-$  che si arrestano nell'emulsione senza dare origine a rami ionizzanti, nè per le stelle generate da  $\mu^-$ , e computiamo senz'altro come mesoni  $\pi^-$  gli eventi  $\sigma$  e come  $\pi^+$  gli eventi  $\pi \rightarrow \mu$ .

La conclusione immediata che si può trarre dai dati della tab. I è che, nelle condizioni geometriche adottate, in particolare a *parità di volume*, il blocco di Al costituisce un radiatore di mesoni di entrambi i segni più efficiente o per lo meno equivalente a quello di Pb.

Si può tentare quindi di risalire alle sezioni d'urto relative di generazione dei mesoni, tenendo conto dell'assorbimento di essi nel radiatore.

Ammettiamo:

1) che lo spettro di generazione nei diversi materiali abbia forma analoga a quella assegnata nei lavori di Bristol per

le lastre <sup>(3)</sup>:

$$E < \sim 70 \text{ MeV}, S(E) = B,$$

$$E > \sim 70 \text{ MeV}, S(E) = AE^{-\frac{3}{2}} \approx 575 BE^{-\frac{3}{2}};$$

2) che la relazione range-energia sia del tipo

$$E = (kR)^m,$$

con  $k = 58,1$ ,  $m = 0,595$  in Al;  $k = 33,8$ ,  $m = 0,618$  in Pb; se  $R$  è espresso in g cm<sup>-2</sup> ed  $E$  in MeV;

3) che i cammini liberi medi della nucleonica siano di  $\sim 200$  g cm<sup>-2</sup> in Al e di  $\sim 300$  g cm<sup>-2</sup> in Pb, e quello dei mesoni sia di  $\sim 90$  g cm<sup>-2</sup> in entrambi i materiali. Con un calcolo analogo a quello fatto a suo tempo da DALLAPORTA e MERLIN <sup>(4)</sup> il rapporto dei coefficienti di produzione per unità di volume risulta:

$$\frac{B_{Al}}{B_{Pb}} = 1,82.$$

Indicando con  $n_{Al}$  e  $n_{Pb}$  i numeri di nuclei per cm<sup>3</sup> si trova il rapporto delle sezioni efficaci di produzione per nucleo:

$$\frac{\sigma_{Al}}{\sigma_{Pb}} = \frac{B_{Al}}{B_{Pb}} \frac{n_{Pb}}{n_{Al}} \approx 1,0.$$

<sup>(3)</sup> U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

<sup>(4)</sup> N. DALLAPORTA e M. MERLIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 963 (1950).

e quello *per nucleone*:

$$\frac{\sigma'_{Al}}{\sigma'_{Pb}} = \frac{\sigma_{Al}}{\sigma_{Pb}} \frac{207}{27} \approx 7,7.$$

L'energia media all'atto della generazione dei mesoni che terminano il loro percorso nelle lastre risulta rispettivamente

$$\overline{E_{Al}} \approx 85 \text{ MeV}, \quad \overline{E_{Pb}} \approx 105 \text{ MeV}.$$

I rapporti delle  $\sigma$  e delle  $\sigma'$  suggeriscono l'ipotesi che i nuclei leggeri siano nettamente favoriti rispetto a quelli pesanti nei riguardi della generazione dei mesoni, in quanto questi ultimi abbiano una elevata probabilità di riassorbire un mesone appena generato nell'interno di essi. Un'indicazione nello stesso senso si

può trarre dalle più recenti misure di sezioni d'urto per la creazione di mesoni da parte sia di fotoni<sup>(5)</sup> che di protoni<sup>(6)</sup>. Non appare invece confermata la conclusione favorevole ad una proporzionalità delle sezioni efficaci di produzione alle sezioni geometriche che discenderebbe da osservazioni di YAGODA su stelle generate in emulsione di lastre esposte nella stratosfera<sup>(7)</sup>.

<sup>(5)</sup> R. F. MOZLEY: *Phys. Rev.*, **80**, 493 (1950); R. LITTAUER e D. WALKER: *Phys. Rev.*, **82**, 746 (1951).

<sup>(6)</sup> D. CLARK: *Phys. Rev.*, **81**, 313 (1951); D. HANLIN, M. JAKOBSON, J. MERRITT e A. SCHULZ: *Phys. Rev.*, **84**, 857 (1951).

<sup>(7)</sup> H. YAGODA: *Phys. Rev.*, **82**, 336 (1951).

## Neutral Meson Production in Energetic Nuclear Encounters (\*).

A. LOVATI, A. MURA and G. TAGLIAFERRI

*Istituto di Fisica dell'Università - Milano*

(ricevuto il 15 Gennaio 1952)

Several authors <sup>(1,2,3)</sup> reported evidence on the production of neutral  $\pi$ -mesons in nuclear collisions of energetic particles of the  $N$  component of cosmic rays. This evidence is mostly based on observing materialization of  $\gamma$  rays, whose energy distribution and angular spread are consistent with an assumed origin from the disintegration of short-lived  $\pi^0$ -mesons, created in high energy transmutations of nuclei. Conclusive proof of the existence of neutral mesons is still lacking in the energy region beyond the available one from artificial accelerators; however, while no evidence contrasting the neutral meson hypothesis has till now been presented, it is generally agreed that this hypothesis is likely adequate to explain the experimental findings. Assuming therefore  $\pi^0$ -mesons to be created in energetic nuclear encounters, we will contribute some remarks to the knowledge of their production rate.

The cloud chamber statistics on the electronic showers produced in nuclear interactions, formerly published by the present authors <sup>(2)</sup>, were extended and are now about twice as good as those. This was attained by adding the results of early cloud chamber operation runs <sup>(4)</sup> and the recent ones by a large multiplate chamber <sup>(5)</sup>. All the observations were taken at the same mountain altitude (3500 m); moreover comparison of single runs showed no relevant effect by the slight differences in the controlling devices. Finally, in the run with the large chamber, a counter control only, above the chamber was used, thus allowing for a comparison with a less biased sample of interactions.

The procedure of collecting the data was the same as in the preceding work <sup>(2)</sup>; namely, we took the nuclear explosions produced in a lead plate, and we observed the penetration of the emitted near relativistic particles and the multiplication of the electronic showers, whose axes reprojected to the origins of the

(\*) Supported by grants from the Gruppo degli Amici dell'Istituto.

(<sup>1</sup>) A. G. CARLSON, J. E. HOOPER and D. T. KING: *Phil. Mag.*, **41**, 701 (1950).

(<sup>2</sup>) A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **7**, 945 (1950), and references cited there.

(<sup>3</sup>) B. P. GREGORY and J. H. TINLOT: *Phys. Rev.*, **81**, 675 (1951).

(<sup>4</sup>) A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 (1949); **6**, 291 (1949).

(<sup>5</sup>) A. LOVATI, A. MURA, G. TAGLIAFERRI and L. TERRA: *Nuovo Cimento*, **8**, 713 (1951).

explosions, in a successive lead plate not less thick than  $13 \text{ g cm}^{-2}$ .

In the table I the numbers of nuclear explosions, distributed according to the numbers of penetrating particles and of electronic showers observed in each of them, are given.

that by increasing the multiplicity of penetrating particles per explosion, the mean number of electronic showers per explosion does not show proportional increase. It is seen that as  $n_s$  rises from 0 to 7, the average value of  $n'_s$  in the interactions resulting in the production

TABLE I. — *Numbers of nuclear explosions, distributed according to the number of penetrating particles ( $n_s$ ), and of electronic showers ( $n'_s$ ), observed in each explosion.*

$n'_s \backslash n_s$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	60	25	13	8	2	1	1	—
1	12	15	6	3	2	1	—	1
2	6	5	4	2	3	—	—	2
3	4	2	5	2	—	—	—	—
4	3	2	2	1	2	—	—	—
5	1	—	—	1	—	—	—	—

Total number of penetrating particles: 233

Total number of electronic showers: 173.

Total number of explosions: 197

The figures represent the observed numbers of explosions: no allowance is made for the interactions fully contained in cloud chamber plates (\*)

The table II shows the numbers of electronic showers containing given numbers of electrons at the bottom of the lead plate used to reveal the electromagnetic component.

of electronic showers stays roughly constant at about 2. The statistical evidence of this result is rather scanty, and the bias introduced by the instrumental selection may be important; so that our

TABLE II. — *Numbers of electronic showers containing given numbers of electrons.*

Number of electrons	< 3	4	5	6-9	> 10	Total
Number of showers	68	34	32	26	13	173

A discussion about the reliability of investigating the presence of neutral mesons by multiplate cloud chamber picture analysis has been already reported<sup>(2,3)</sup>, and will not therefore be repeated here.

Let us now consider the explosions listed in the table I. One first notes

aim in reporting it is mainly recalling attention on a feature that, if confirmed, should prove of some interest in discussing the process leading to  $\pi^0$  production. It is to be remarked that we did not attempt to individuate  $\pi^0$ -mesons by correlating pairs of electron showers produced in one nuclear explosion; thus we are unable to say if the events with  $n'_s \geq 3$  in table I may be regarded as suggesting a production of more than one neutral meson in a single event.

Then, we wish to discuss in some

(\*) A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **8**, 271 (1951).

detail the question as to the relative numbers of charged and neutral  $\pi$ -mesons forming in the explosions. The inherent difficulties in evaluating the ratio  $\Phi = N_{\pi^0}/(N_{\pi^+} + N_{\pi^-})$  by experiments like ours may be summarized thus:

(i) the number  $N_{\pi^0}$  of neutral mesons must be derived from the number of observed electron showers; this obviously implies several uncertainties because of geometrical limitations, overlapping of showers, loss of showers containing very few electrons, etc.;

(ii) also the number  $(N_{\pi^+} + N_{\pi^-})$  of charged mesons must be derived from the number of observed penetrating particles, through a comparison with nuclear plate data;

(iii) the statistics are somehow distorted by counter control.

Therefore, we regard the following information about  $\Phi$  as quite tentative. If we confine to consider the interactions with  $n_s \geq 2$ , we may believe that all the events we are dealing with are in practice examples of interactions giving rise to meson production. In these interactions we observed a total of 184 penetrating particles and 81 electronic showers. Following GREGORY and TINLOT's<sup>(3)</sup> procedure, the number of  $\pi^0$ -mesons corresponding to the 81 electronic showers is found to be  $\sim 50$ . On the other side, the  $\pi^\pm$ -mesons are known to be about  $3/4$  of all the penetrating particles emitted in these explosions<sup>(7)</sup>. Thence we get  $\Phi \sim 0.36 \pm 0.10$  (statistical error only). One notes that this result is rather consistent with GREGORY and TINLOT's one, deduced for interactions with  $n_s > 3$ . Also the value reported by CARLSON, HOOPER and KING<sup>(1)</sup> seems in sufficient agreement.

However, it would be of interest to be informed on the value of  $\Phi$  in all the explosions leading to meson production,

without imposing any condition as to the number of penetrating particles emerging from the interactions. Unfortunately,  $\Phi$  cannot be evaluated in this case with some accuracy, on account at least of the counter control bias when explosions with low multiplicity of penetrating particles are considered. We only note therefore that, if the same procedure as above is applied, the value of  $\Phi$  for all the explosions listed in table I would turn out to be  $110/175 \sim 0.63$ . Now this figure is believed to be an upper limit, as the instrumental selection tends to favour the revelation of the explosions with electronic showers, and again the  $\pi^\pm$ -meson percentage should not be far different from  $\sim 3/4$  of the shower particles<sup>(8)</sup>. Summing up, we are of the opinion that for explosions produced in lead by incoming particles of energy from, say,  $1 \div 2$  to  $10$  GeV,  $\Phi$  should range at about  $0.3 \div 0.5$ . The value we suggest seems at present hardly reconcilable with the one reported by CAMERINI et al.<sup>(8)</sup> ( $\Phi = 1$  for showers with  $n_s \leq 4$ ). It is worth while to remark that recent rather unbiased results of SALVINI<sup>(9)</sup> and of SALVINI and KIM<sup>(10)</sup> on the  $\pi^0$  production cross-section, and on the  $\Phi$  for showers produced by primary particles of energy beyond  $2$  GeV, would support somewhat the above conclusion.

We plan to continue the research on neutral meson production, and we are now taking pictures of random expansions of the large multiplate chamber<sup>(5)</sup> with the purpose of getting less distorted statistics. To date, we found no evidence contrasting the views suggested in this letter.

<sup>(8)</sup> U. CAMERINI, J. H. DAVIES, P. H. FOWLER, C. FRANZINETTI, H. MUIRHEAD, W. O. LOCK, D. H. PERKINS and G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

<sup>(9)</sup> G. SALVINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 798 (1951).

<sup>(10)</sup> G. SALVINI and Y. KIM: *New York Meeting*, February 1951. We thank prof. SALVINI for kindly communicating his results before publication.

<sup>(7)</sup> U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).



## On the Quantum Theory of Fields (II).

G. WATAGHIN

*Istituto di Fisica dell'Università - Torino*

(ricevuto il 17 Gennaio 1952)

Recently several forms of a non local field theory <sup>(1)</sup> were proposed and also a statistical theory of a meson production in a high energy collision was discussed <sup>(2)</sup>. The present attempt to find a satisfactory description for the latter processes is related to some earlier suggestions <sup>(3)</sup> concerning generalized commutation rules, relativistic cut-off operators and thus non local interactions. The experimental evidence on multiple meson production and some analogy with the results obtained with non linear and non local interactions <sup>(4)</sup> will guide us in this research.

Let us consider a collision between two particles in the  $C$  system of reference in which the total momentum vanishes:  $\mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = 0$ . We assume, as in (I), that an interaction between two particles comes into play in a domain  $D_l$  of the space-time, where the relative coordinates  $\eta_\mu = x'_\mu - x''_\mu$  satisfy the condition:

$$(1) \quad 2 \left| \frac{\eta_\mu P^\mu}{\sqrt{P_\mu P^\mu}} \right|^2 - \eta_\mu \eta^\mu \lesssim l^2,$$

or in the  $C$ -system:

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 \leq l^2,$$

where  $l$  is a universal length.

We assume also that the results of the interaction are statistically uncertain, due to the competition between various possible modes of the distribution of the total energy between the created and outgoing particles. The various conservation laws of momenta, angular momenta, and charges must be satisfied. Outside the domain  $D_l$ , before and after the collision, the state of the assembly of free ingoing and outgoing particles can be described by a product:

$$\psi = \psi_1(x'p')\psi_2(x''p'') \dots \psi_n(x^{(n)}p^{(n)}),$$

<sup>(1)</sup> *Nuovo Cimento*, **8**, 592 (1951). Cited as I.

<sup>(2)</sup> M. MARCOV, H. YUKAWA, J. RAYSKY, C. BLOCH, C. MOELLER, H. Mc. MANUS, R. E. PEIERLS.

<sup>(3)</sup> E. FERMI: *Elementary particles* (1951).

<sup>(4)</sup> *Nature*; **142**, 393 (1938); *Compt. Rend.*, **207**, 358 and 421 (1938); *Academ. Bras. Scien. Symposium* (1941), p. 129.

where every  $\psi_K$  is a solution of equations of propagation of free particles and represents a wave-packet limited in space and time.

The essential features of the method we want to suggest in this preliminary report are: the separate treatment of the propagation of free particles outside the domain  $D_l$ ; where usual (causal) differential equations must be applied, and the statistical treatment of the interaction inside the domain  $D_l$  of relative coordinates  $\eta_\mu$ . For the assemblage of created outgoing particles, the result of interaction cannot be stated by the usual statistical methods based on the notion of equilibrium. Even the number of quantum states per energy interval  $\Delta p_0 \lesssim p_0$  results so reduced that the asymptotic formulae adopted in the usual statistical methods are no more valid. We must introduce new assumptions. The experimental data induce us to assume a new uncertainty relation, which in the  $C$ -system can be written as:  $\Delta p_0 \sim p_0$ ; for  $p_0 > p_c$  [where  $p_c = \hbar/l$  is the critical value of the momentum]. If we calculate the average value of a spherical wave group (having  $\Delta p_0 \sim p_0$ ) in the domain  $D_l$  we obtain a cut-off operator  $G \sim (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{-2}$ . This is in accord with the observed meson spectra and with the following form of a universal cut-off operator:

$$G = p_c^4(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_c^2)^{-2}.$$

The calculation made with these operators and the construction of the  $S$ -matrix for the meson production will be published elsewhere.

## The Theory of Ionization and the Emission of Cerenkov Radiation.

M. SCHÖNBERG

*Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles*

(ricevuto il 18 Gennaio 1952)

The latest experimental results (\*) of VOYVODIC at Bristol and WILSON at Manchester show that the present form of the theory of the ionization loss of relativistic charged particles is not satisfactory. The present form of the theory is based on a combination of classical and quantum computations, along the lines given by FERMI <sup>(1)</sup>, the contribution, of the close collisions being taken from the Bethe-Bloch quantum treatment and the effects of the polarization of the medium being computed classically. It was shown by FERMI <sup>(1)</sup> that the Cerenkov radiation is included in the part of the energy loss associated to polarization effects. A. BOHR <sup>(2)</sup>, SCHÖNBERG <sup>(3,4)</sup> and MESSEL and RITSON <sup>(5)</sup> have shown that the part of the increase of the loss in the relativistic region associated with polarization effects is due to the emission of Cerenkov radiation, in classical theory. The latest experimental

results show that the increase of ionization agrees approximately with the theoretical predictions for the total loss, including Cerenkov radiation. If the present theory were correct, this would mean that the Cerenkov radiation is almost completely absorbed in the immediate neighbourhood of the track. Experimental values of the absorption coefficients are not available for all the range of frequencies of intense Cerenkov radiation. An estimate, based on theoretical values and extrapolation of the known absorption coefficients, gives an absorption of the Cerenkov radiation considerably lower than we should have to assume to explain the observed ionization increase after the minimum.

It is unlikely that the Cerenkov radiation should be so strongly absorbed as the interpretation of the latest experimental data would require. It is more satisfactory to conclude that the distribution of the loss between direct ionization and excitation and the emission of Cerenkov radiation predicted by the present theory is not correct, there being less Cerenkov radiation and more <sup>(2)</sup> direct ionization-excitation. We have already pointed out that the Cerenkov spectrum given by classical theory requires important quantum corrections (refer. 3, pg. 27) and also that the con-

(\*) Private communication.

<sup>(1)</sup> E. FERMI: *Phys. Rev.*, **57**, 485 (1940).

<sup>(2)</sup> A. BOHR: *Det. Kgl. Dans. Vid. Sels.*, **24**, n. 19 (1948).

<sup>(3)</sup> M. SCHÖNBERG: *Bull. Cent. Phys. Nucl. Bruxelles.*, n. 20 (1950).

<sup>(4)</sup> M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 159 (1951).

<sup>(5)</sup> H. MESSEL and D. M. RITSON: *Phil. Mag.*, **41**, 1129 (1950).



clusion that the increase of the loss associated to polarization effects in the relativistic region consists mostly of Cerenkov radiation might not hold in a quantum treatment (ref. 3, pg. 4). A quantum treatment of the polarization effects is not available to the author, but it is possible to discuss in a qualitative way some of the features of the mechanism of the loss of energy and to gain some insight into the reasons of the limitations of the existing classical treatment.

The classical theory predicts that the most intense Cerenkov bands correspond in general to frequencies of the order of the ionization potentials of the intermediate shells of the atoms of the ionized medium. The mechanism of the eventual emission of such photons is not exactly known, but it seems plausible to assume that they are due to single electron jumps. The emission of the most intense Cerenkov bands would then require jumps between levels of the continuous spectrum and discrete levels, i.e. jumps corresponding to a previous ionization of atoms of the medium. Thus we see that the emission of the most intense Cerenkov bands predicted by the present classical theory could hardly occur, since they would require probably the previous ionization of atoms. Instead of direct emission of high frequency Cerenkov radiation we may expect to have ionization.

Thus we can understand the experimental results.

It follows from the preceding considerations that the most unsatisfactory feature of the existing classical treatment of the energy loss in the relativistic region is the model of the atoms of the medium as formed by systems of harmonic oscillators, since such harmonic oscillators can vibrate with any amplitude without ejection of electrons. It is interesting to remark that in the present classical theory the Cerenkov radiation flows from the immediate neighbourhood of the trajectory of the ionizing particle — as we have shown in references 3 and 4 — and, since it is well known that quantum corrections are important in the description of close interactions, this circumstance indicates also that the classical theory of the emission of Cerenkov radiation is not satisfactory. The classical result that the Cerenkov radiation flows right from the trajectory of the ionizing particle suggests that the Lorentz transformed Coulomb field in the neighbourhood of the ionizing particle is modified in a non negligible way by the polarization of the medium, so that the Bethe-Bloch treatment of the close collisions may require some corrections.

I thank professors COSYNS, OCCHIALINI and VOYVODIC for many useful discussions.

## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

F. HENNING — *Von tiefen und hohen Temperaturen*. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 84 pp. 1951.

La temperatura è forse, tra le varie quantità fisiche, quella che richiede, per la sua misura, la conoscenza del maggior numero di tecniche sperimentali ciascuna con un proprio campo di applicazione. Per questa ragione il libretto in esame, pur senza avere alcuna pretesa di presentare un quadro completo, sia pure in forma elementare, di ciò che si sa attorno alla misura delle temperature, è particolarmente utile poichè esso si propone di esaminare tali tecniche sperimentali, di indicarne i limiti e le difficoltà di applicazione.

L'autore, come non ha voluto entrare in merito agli sviluppi analitici delle teorie su cui poggia la termometria, così non ha toccato altro che per inciso le ardue questioni riguardanti la definizione termodinamica della temperatura.

Dato il carattere di rassegna di tecniche sperimentali che esso ha, è giusto che il libro si apra con un accenno ai primi tentativi di misura della temperatura, fino all'accettazione universale dei due punti fissi fondamentali della termometria: la temperatura del ghiaccio fondente e del vapor d'acqua all'ebollizione sotto pressione normale. Il primo capitolo, dedicato tutto alla termometria pratica, seguita poi con l'esame del termo-

metro a fluido, e con l'esposizione del funzionamento dei termometri elettrici e a radiazione.

Il secondo, il terzo ed il quarto capitolo, sono dedicati alle relazioni tra temperatura e materia, radiazione e magnetismo rispettivamente; l'ultimo capitolo dà ragguagli sullo stato attuale delle convenzioni internazionali circa le scale termometriche e i punti fissi.

I tre capitoli centrali hanno tutti una prima parte di introduzione teorica che non è altro che un richiamo di alcune formule fisiche fondamentali e una seconda parte in cui viene esaminato un particolare campo della termometria che si riconnette ad esse. Sono così trattati particolarmente i problemi relativi alla temperatura delle stelle e all'intervallo di temperature inferiori a 1 °K.

Dato che tra gli scopi dichiarati dall'Autore vi è quello di chiarire gli ordini di grandezza sia degli intervalli di temperatura misurabili con i vari metodi, sia delle precisioni raggiunte, il libro è corredato da numerose tabelle e nel testo sono inseriti tutti i suddetti dati con frequenti esempi. La trattazione, accompagnata da 44 figure, è semplice, però presuppone nel lettore approfondite conoscenze di fisica; si è quindi in presenza di una pubblicazione che si prefigge, e felicemente raggiunge, il fine di dare un quadro di massima dell'attuale termometria, delle sue difficoltà e dei suoi successi.

G. CORTELESSA

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 23-I-1952